PERFECTION

The Journal of the Pi Society

2 02/2000

The Pi Society

14 avenue Condorcet, 69100 Villeurbanne, France

Je me suis souvent hasardé dans ma vie à avancer des propositions dont je n'étais pas sûr ; mais tout ce que j'ai écrit là est depuis bientôt un an dans ma tête, et il est trop de mon intérêt de ne pas me tromper pour qu'on me soupçonne d'avoir énoncé des théorèmes dont je n'aurais pas la démonstration complète. Evariste Galois

Description

Name of the society : The Pi Society
Date of foundation : 1999
Cut-off : 99.9999th percentile
Spirit of the Society : M-classification
Structure : International Membership
Journal of the Society : Perfection
Language of the Journal : Free

Qualifying Scores

The following are minimum qualifying scores for membership in the Pi Society.
Test by P. Cooijmans : The Nemesis Test : 176
Test by P. Cooijmans : Test for Genius (short form) : 176 (before 1999)
Test by P. Cooijmans : Test for Genius (long form) : 176
Test by P. Cooijmans : Space, Time and Hyperspace : 176
Test by P. Cooijmans : Daedalus Test : 176
Test by P. Cooijmans : The Test to End All Tests: 176
Test by R. Hoeflin, Ph.D. : Mega Test : 176 (before 1999)
Test by R. Hoeflin, Ph.D. : Titan Test : 176 (before 1999)
Test by R. Hoeflin, Ph.D. : The Hoeflin Power Test : 176 (before 2000)
Test by R. Jonasson : Logima Strictica : 176
Test by K. Langdon : LAIT : 173 (before 1994)
Test by N. Lygeros, Ph.D. : G-Test : 176

Is Consciousness Physical?

G. Fogleman

Many people have the intuition that consciousness cannot be merely physical. This insight can be phrased as follows: There is something about subjective conscious experience that cannot be explained by physical laws. By physical laws I mean all that we know, in a broad sense, about the laws of physics, including relativity and quantum mechanics, and all that in principle can be built up from these fundamental laws: chemistry, biology, neurophysiology. A number of present-day philosophers believe that consciousness can be fully and satisfactorily explained in terms of physical mechanisms. Others disagree and believe that there must be something non-physical about consciousness. In *The Conscious Mind*, David Chalmers reports that he conducted an informal survey and found that the ratio is about two or three to one in favor of the physicalist description.

Proponents of the view that consciousness is not physical have had great difficulty coming up with a satisfactory argument for their case. In this article I review Frank Jacksons attempt, known as the knowledge argument, and discuss some of the rebuttals that have followed.

In his 1980 article What Mary Didnt Know, Frank Jackson attempts to refute the version of physicalism that states that the world is *entirely* physical. He considers a scientist named Mary who is confined to a black-and-white environment but who has learned everything there is to know about the physics, neurophysiology, associated functional states, etc. of color. If physicalism is true, then Mary knows everything there is to know about color. However, it cannot be the case that Mary knows all there is to know about color. When she is let out of the black-and-white room or given a color television, she will learn what it is like to see something red, say. Thus, from her subjective experience of the color red she acquires new knowledge about the world, and physicalism must be false. Jackson points out that the knowledge that Mary initially lacked was knowledge about the experience of others and not about her own. After Mary is let out of her black-and-white environment, she will realize that there was something about other peoples understanding of color that she was quite unaware of. Jackson says that knowledge about this feature is knowledge about a fact, but not a physical fact.

Laurence Nemirow and David Lewis disagree. They point out that the knowledge argument assumes that knowledge of what its like must be knowledge of the way things are. This identification is wrong and results from the confusion of knowledge with ability. Knowledge of what it is like to see a color is, in effect, the ability to imagine seeing that color. Referring back to Jacksons argument, Mary does not acquire new knowledge, but only new abilities. Thus the completeness of the physicalist description is not threatened. Some abilities are not expressible linguistically (e.g., how to wiggle your ears or ride a bicycle) and can only be learned by, say, trial and error, after having the basic idea pointed to through use of related concepts that are already available. There are some cases, e.g. the case of trying to explain the sensation of red to a blind person, where no related concepts are available and the attempts to express the new concept linguistically are doomed to failure. This does not appear, however, to cause any problems for physicalism. The argument of Nemirow and Lewis is known as the ability hypothesis.

In a 1995 article, Martine Nida-Rümelin attempts to explicitly separate the knowledge-how and the knowledge-that acquired by Mary when she is released from her black-and-white environment. Nida-Rümelin introduces a character named Marianna who, like Mary, has always lived in a black-and-white environment. She is not required to have detailed physicalist knowledge about color. Marianna is presented with four samples of color – say pieces of paper that are blue, red, green and yellow. She is asked which of these colors does she believe to be the color of the sky. Having always heard that the sky is beautiful, and personally finding the red paper particularly pretty, she points to the red paper and says I believe the sky is this color. Marianna correctly believes that she is normally sighted.

To explicitly state what it is that Marianna believes, we must distinguish between two uses of the concept of color. There is a linguistic, non-phenomenal meaning of color, denoted by blue(np) and red(np), that Marianna understands. Marianna believes that (1) the sky is blue(np) and not red(np). After being shown the colored papers, Marianna also knows the phenomenal sensations corresponding to blue and red, called blue(p) and red(p). Marianna incorrectly believes that (2) the sky appears red(p) and not blue(p) to normally sighted people. Mariannas beliefs (1) and (2) are beliefs about something that may or may not be the case, and thus these beliefs should have propositions as their content.

Nida-Rümelin points out the following about Jacksons Mary argument: When Mary is finally released she acquires new knowledge about the experiences of others (She learns, e.g., that the sky appears blue(p) to people with normal color perception). But Mary does not gain this item of knowledge simply by gaining sight and thereby acquaintance with colors. A disadvantage of Jacksons example is that it fails to distinguish two steps of epistemic progress that can be distinguished clearly in Mariannas case. There are two steps involved. First, Mary acquires epistemic access to color through personal experience of what it is like to see color. Second, Mary gains knowledge about things like how the sky appears to normally-sighted people.

Nida-Rümelin concludes that the above considerations provide a counter argument to the ability objections to Jacksons knowledge argument: I hope to have convinced the reader that the ability objection loses its intuitive appeal once one accepts that Marys epistemic progress is adequately described in the way here proposed (as an acquisition of phenomenal knowledge and not as an acquisition of knowing what its like) and that it certainly is not obvious how the claim that phenomenal knowledge too is nothing but a bundle of practical abilities could be argued for in a convincing manner.

I have only provided a very brief summary of these recent philosophical arguments, but I hope I have been able to give a little of the flavor of the discussion. Anyone interested in working through the full details of these arguments should take a look at the original papers.

Chalmers, D. (1996), The Conscious Mind (Oxford, Oxford University Press).

Jackson F. (1986), What Mary Didnt Know, Journal of Philosophy, 83, p.291-295.

Lewis, D. (1990), What Experience Teaches, in Mind and Cognition, ed. W. Lycan (Oxford: Blackwell), p. 499-519.

Nemirow, L. (1990), Physicalism and the Cognitive Role of Acquaintance, in Mind and Cognition, ed. W. Lycan (Oxford: Blackwell), p. 490-499.

Nida-Rümelin, M. (1995), What Mary Couldnt Know: Belief about Phenomenal States, in Conscious Experience, ed. T. Metzinger (Paderborn: Schöningh), p. 219-241.

The Hofstadter Sequence: A Paradigm for Non-uniform Reasoning

N. Lygeros

translated from french by Q. Jackson and the author

The Douglas Hofstadter sequence is, to some extent, a deformation of Fibonacci's. It represents a generic case of the existence of an abstracted relation between the immediate future and the remote past. With the opposition to the mentality generated by the theory of differential equations, we find in this sequence a fractal aspect whose complexity is interpreted a priori as indeterminism because this recursive process seems to have a chaotic behavior. Our goal is to show that this process, ultimately deterministic and understandable, constitutes a paradigm for non-uniform reasoning.

One of the characteristics of the reasoning described as intelligent is the synchronic synthesis of knowledge to solve a given problem. It seems that for relatively elementary problems - for example, exercises or fast tests - this characteristic is amply sufficient for their resolution. The really difficult problems, however, require the use of diachronic synthesis. This method, although very expensive in terms of memory, is essential. Indeed, its power not only makes it possible to overcome the difficulties encountered, but also to completely understand the complexity of the problems.

Within this framework, let us attempt to analyze the surprising character of the fast resolution of a complex problem. It is obvious that this type of resolution can come from a preliminary knowledge of a problem and an analogous resolution. Let us therefore exclude this case from our study, a choice which all the more highlights the surprising character of the resolution. Let us propose, then, a possible explanation of this phenomenon: fast resolution appears surprising for one observing the solver because the observer first carries out an implicit inference, knowing the continuity of the reasoning in cognitive space. This inference implies for the observer that there is no essential phase shift in the reasoning of the solver. Thus, for the observer, the immediate outcome of the intellectual advance could even depend only on the present. Nevertheless, we now consider a type of problem whose heuristic model corresponds to the Douglas Hofstadter sequence. It is clear that the value sought for a given row does not depend on those of immediately close rows. In this type of problem, a local knowledge proves to be insufficient and only a diachronic synthesis, and thus, in a certain total way, allows the determination of the required value. And it is precisely this method of the solver that surprises the observer: the solver was not locally fast but different in an essential way.

Thus our paradigm of non-uniform reasoning explicitly shows that the difference between a reasoning based on a diachronic synthesis and another is qualitative rather than quantitative. Moreover, when the solver belongs to one of the fundamental categories (cf our article: M-classification) this qualitative difference leads to a concept incomparable in cognitive space.

L'enfant surdoué et l'école

M. Heremans

psychologue de Mensa Youth Foundation Belgium-Luxemburg

La science n'a pas dit son dernier mot, loin s'en faut, sur les questions relatives à la cognition humaine. Les considérations idéologiques supplantent trop souvent les réflexions scientifiquement fondées, y compris chez les " défenseurs " du QI et de la surdouance. Je sais parfaitement bien qu'en prenant fait et cause pour la reconnaissance et la défense des enfants surdoués je tombe partiellement dans le piège idéologique que je dénonce. Le militantisme fait rarement bon ménage avec la science. De plus,la " réalité " est souvent très difficile à modéliser en sciences humaines ; les généralisations propres au discours scientifique s'avèrent facilement abusives. Considérez donc les assertions qui suivent avec les nuances qui s'imposent...(remarques, critiques,...bienvenues !)

Pourquoi l'école actuelle est-elle inadaptée aux enfants intellectuellement précoces?

L'ennui

* Les programmes scolaires sont conçus en fonction du rythme d'apprentissage moyen des élèves.

* Or, dès leur entrée en première primaire, les enfants surdoués ont, intellectuellement s'entend, au moins un an et demi d'avance par rapport aux enfants d'intelligence moyenne.

* Ils sont dans une situation plus ou moins comparable à celle d'un enfant d'intelligence moyenne qui serait contraint de suivre un enseignement dans une école fréquentée par des déficients mentaux !

* L'hétérogénéité croissante des classes, due à une série de mesures politiques récentes (cabinet Onckelinckx) visant à retarder, voire éliminer, toute forme de sélection (interdiction de redoublement avant la fin de la deuxième primaire (CE1), passage automatique de la première à la deuxième secondaire (en France, passage de 6ème en 5ème), etc.), aggrave encore le décalage que vit l'enfant surdoué.

* Selon Jean-Charles Terrassier, spécialiste français des enfants surdoués, on assiste ainsi à une augmentation artificielle du nombre d'élèves surdoués!

* Des propos qui précèdent, il ne faudrait pas conclure de façon hâtive que le redoublement est à mes yeux une mesure nécessaire et efficace. Mais sa suppression, sans autre forme de procès, nous fait tomber de Charybde en Scylla !

La dyssynchronie intellectuelle (au sens de Jean-Charles Terrassier)

* L'école, organisée en classes d'âge est adaptée à un enfant purement virtuel qui serait moyen dans tous les secteurs (mathématiques, orthographe, raisonnement verbal ou logico-mathématique, capacités d'attention etc.)

* Or, les enfants surdoués polyvalents sont l'exception plutôt que la règle. Pourquoi un élève très doué en mathématiques, par exemple, devrait-il être freiné dans sa progression au sein de sa branche de prédilection sous prétexte qu'il a moins de facilités en orthographe ou que son écriture ne correspond qu'à son âge chronologique?

* Le regroupement des enfants surdoués dans des classes spéciales ne résout que partiellement ce problème.

Pédagogie inadaptée

* Si les enfants " légèrement " surdoués (QI 130 - Perc. 98) s'accommodent parfois de solutions consistant à accélérer ou renforcer le programme (saut de classe, choix d'une école élitiste, par exemple) il en va différemment des enfants modérément (QI 150 - Perc. 99.9) et surtout sévèrement (QI 160/170 - Perc. 99.99) surdoués qui sont qualitativement trop différents des enfants ordinaires, même motivés et travaillant beaucoup.

* L'approche artificiellement encyclopédique des écoles élitistes, la quantité de matière prévalant sur l'intégration des connaissances (" tête bien pleine ") et le caractère trop dirigiste et conformiste de leur " pédagogie " (discours magistral, rôle passif de l'élève) ne parviennent pas à satisfaire la curiosité intellectuelle propre au surdoué.

* Les écoles à pédagogie dite " nouvelle " (Montessori,Freinet, Decroly) sont en ce sens plus adaptées puisque les élèves y sont considérés comme acteurs plutôt que comme spectateurs des apprentissages. Par ailleurs, l'importance que ces écoles accordent à l'intégration des connaissances (" tête bien faite ") convient bien à l'approche cognitive de l'élève surdoué. Malheureusement les connaissances proprement dites (connaissances déclaratives telles que définies en psychologie cognitive) y occupent souvent une place vraiment trop réduite. L'enfant n'est pas suffisamment entraîné à mémoriser.

Difficultés d'intégration

* L'enfant surdoué a des difficultés à communiquer avec les enfants de son âge parce qu'il ne partage pas leurs centres d'intérêts. Et s'il les partage, il les aborde de manière qualitativement différente.

* Philippe Gouillou, autre spécialiste français des enfants surdoués, dit à ce sujet, reprenant un concept utilisé en P.N.L., que l'enfant intellectuellement précoce est dans l'incapacité de réussir ses " tests de similarité " avec les enfants de son âge.

* Afin d'établir coûte que coûte un contact avec leurs pairs, certains enfants essayent d'adopter les comportements les plus normalisés possibles . Ils jouent en quelque sorte un rôle de composition en " singeant " les autres. La personnalité ainsi construite se révèle tellement artificielle qu'elle est rapidement démasquée par les autres enfants d'où, isolement progressif; risques de phobie scolaire, de dépression, voire de suicide.

Mauvaises habitudes de travail

En référence à la théorie de Piaget concernant l'adaptation, on peut considérer que l'enfant surdoué est doté de telles capacités d'assimilation que les schèmes d'accommodation sont insuffisamment mis à contribution. Il n'apprend pas à travailler, à se dépasser, à faire preuve de persévérance. Dès lors, la moindre " vraie " difficulté le déconcerte, voire l'angoisse. Il abandonne parfois prématurément une tâche dont la solution ne lui apparaît pas de façon immédiate. Dans l'enseignement secondaire (surtout à partir de la troisième année) il peut être confronté à des difficultés d'apprentissage et de mémorisation lorsque les matières deviennent plus complexes !

Que faire ?

* Le principe général à suivre est identique à celui qui devrait prévaloir à l'éducation de tout enfant : lui assurer un épanouissement intellectuel et socio-affectif optimal.

* Il est donc nécessaire de veiller à ce que l'enfant :

- puisse progresser à son rythme, nécessairement différencié selon les secteurs puisque, comme je l'ai dit plus haut, la précocité polyvalente est l'exception

- ait la possibilité de réussir ses tests de similarité avec d'autres enfants

* En Belgique il n'existe malheureusement pas de structure scolaire adaptée aux enfants surdoués. Le " syndrome " de la précocité intellectuelle est en effet superbement ignoré dans notre pays . Le décret " Onckelinckx " du 31/5/1999 (ce fut le cadeau d'adieu de notre ministre de l'éducation !) modifiant la réglementation relative aux jurys de la communauté française compétents pour l'enseignement secondaire, m'a ôté l'une des rares possibilités d'orientation qui restait à ma disposition pour ces enfants, à savoir, l'admission anticipée aux examens du jury (l'autre possibilité est le saut de classe, en primaire, du moins). En effet, ce décret interdit (aucune dérogation n'est prévue), à tout élève suivant des cours par correspondance - en France, à distance- (auxquels les surdoués ont souvent recours) de terminer ses humanités avec plus d'un an d'avance. Il s'agit d'une mesure très injuste si l'on sait que le taux de réussite des enfants admis précocement à ces examens est très supérieur à la moyenne ! (en France, une mesure identique avait été proposée - j'ignore si elle est toujours d'application -concernant le baccalauréat

Echec scolaire chez l'enfant surdoué

Contrairement à une opinion répandue parmi le grand public, les enfants surdoués rencontrent parfois de graves difficultés scolaires. Parmi les raisons qui expliquent l'échec, citons les causes d'origine :

- Conative : démotivation due à l'ennui ;

- Socio-affective : inhibitions liées à l'impossibilité de nouer des contacts enrichissants avec ses pairs.(et souvent aussi, malheureusement avec les enseignants) Or l'équilibre affectif favorise l'investissement intellectuel. ;

- Cognitive : consécutives à la dyssynchronie intellectuelle. Ces dernières passent très souvent inaperçues à l'école primaire parce que l'enfant camoufle, grâce à son potentiel élevé, certaines difficultés plus ou moins spécifiques, par ex. :

- Syndrome ADHD (ou " hyperkinésie ") : caractérisé par des troubles intensifs de l'attention sélective souvent associés à une instabilité motrice excessive. (à ne surtout pas confondre avec la suractivité de l'enfant qui s'ennuie);

- Dyslexie : difficultés sévères en lecture liées à l'impossibilité d'automatiser les processus de décodage (des graphèmes en phonèmes). La lecture à voix haute de l'enfant dyslexique est, si on la compare à celle des normolecteurs du même âge, trop lente, hachée et fautive. La dyslexie peut passer longtemps inaperçue chez l'enfant surdoué parce que ses capacités de compréhension et sa culture générale suppléent partiellement aux difficultés de décodage.

Temps de travail, Machines et Chomage

A. Frank

Les machines (robots, ordinateurs,...) ont été conçues pour aider l'homme, et non pour lui poser un tas de problèmes. Or , que se passe-t-il? Dans le contexte actuel, elles sont génératrices de chômage!! Ce n'est évidemment nullement leur "faute", mais la cause de ce sinistre état de fait est à chercher dans un système aberrant.

Pour effectuer une tâche déterminée, il fallait il y a vingt ans (à titre d'exemple) 10h. Maintenant, avec l'aide des machines, il n'en faut plus que 5. Donc, pour une même productivité, au lieu de 38 h (par semaine), il n'en faut plus que 19 (un peu plus, globalement, vu la maintenance des machines). C'est magnifique : Grâce aux machines, il faut travailler deux fois moins pour obtenir le même résultat. Ce devrait être une grande réussite! (nous n'entrerons pas ici dans le problème de la civilisation des loisirs) . Que ce passe-t-il en pratique? "ON" a fixé des "temps de travail" (le nombre d'heures à prester par semaine - et non pas ce qui doit être fait) , et comme, grâce aux machines, deux personnes peuvent maintenant, pendant ce temps, faire ce qu'une faisait avant, on licencie l'autre, au nom du rendement! Dès lors, les machines sont devenues des ennemies de l'homme. Cette vision peut sembler simpliste, mais les exemples pullulent : Faire une facture, émettre un billet d'avion, imprimer un article,...

Et cela ne semble en rien devoir s'arrêter : la "compétitivité" à tout prix, le "tabou" du nombre d'heures à respecter, la peur (!) de pouvoir être remplacé par une machine "plus rapide et plus efficace". Combien de gens auraient un "rendement" (je n'aime pas ce terme) meilleur s'ils pouvaient travailler à leur rythme et à leur convenance, pour exécuter des tâches données.

Je terminerai en donnant un exemple que j'ai agréablement vécu : Il y a 25 ans, j'étais responsable des horaires à l'Université Nationale du Zaïre, Campus de Kisangani. L'emploi du temps annuel demandait la prise en considération de beaucoup de données (déplacements des visiteurs, regroupements, locaux...) En une semaine, je réalisai l'emploi du temps de tout le monde, pour un an. Les quelques centaines de professeurs et représentants d'étudiants se trouvèrent satisfaits. Le Secrétaire général de l'université, m'ayant convoqué, me dit " tu as réalisé un travail qui prend "normalement" deux mois" , donc tu reprendras tes activités dans sept semaines... en attendant, amuse-toi bien! Que la vie serait belle s'il en était toujours ainsi.

New ECM record

N. Lygeros, M. Mizony, P. Zimmermann

Champion of 40 digits
1232079689567662686148201863995544247703 p(11279) (Lenstra-Dixon 10/91)
Champion of 42 digits
184976479633092931103313037835504355363361 10,201- (D. Rusin 04/92)
Champion of 43 digits
5688864305048653702791752405107044435136231 p(19997) (Berger-Mueller 03/93)
Champion of 44 digits
27885873044042449777540626664487051863162949 p(19069) (Berger-Mueller 06/95)
Champion of 47 digits
12025702000065183805751513732616276516181800961 5,256+ (P. Montgomery 11/95)
28207978317787299519881883345010831781124600233 30,109- (P. Montgomery 2/96)
Champion of 48 digits
662926550178509475639682769961460088456141816377 24,121+ (R. P. Brent 10/97)
Champion of 49 digits
1078825191548640568143407841173742460493739682993 2,1071+ (P. Zimmermann 6/98)
Champion of 53 digits
53625112691923843508117942311516428173021903300344567 2,677- (C. Curry 9/98)
Champion of 54 digits
484061254276878368125726870789180231995964870094916937 (N. Lygeros, M. Mizony 12/99)

On December 26, 1999, we found a prime factor of 54 digits of a 127-digit composite number with GMP-ECM, a free implementation of the Elliptic Curve Method (ECM) of Paul Zimmermann based on T. Granlund's GMP multiprecision library. According to the table maintained by Richard Brent this is the largest prime factor ever found by ECM.

The number we factored was a cofactor from $(6^{43}-1)^{42}+1$, more precisely $n = b^4 - b^2 + 1$ where $b = 6^{43} - 1$. It was known that $n = 13 * 733 * 7177 * c127$ where c127 is a 127-digit composite number. We discovered that this number factors into $c127 = p54 * p73$ where $p54 = 484061254276878368125726870789180231995964870094916937$ is the factor found. This search was done in a huge factoring project started a year ago about generalized Sloane's sequences. Those generalize sequences A003504, A005166 and A005167 from The Encyclopedia of Integer Sequences.

The Elliptic Curve Method was discovered by H. W. Lenstra in 1985. The lucky curve was of the form $b * y^2 * z = x^3 + A * x^2 * z + x * z^2$
with A =422521645651821797908421565743985252929519231684249666 mod p, and group order $2^3{*}3^2{*}13{*}53{*}283{*}337{*}29077{*}837283{*}1164803{*}3978523{*}7613819{*}8939393{*}13323719$. Very surprisingly, the 54-digit prime was found in step 1 of ECM! The first limit used was B1=15,000,000. The probability of finding a 54-digit prime in step 1 with such parameters is about one over three million. We just did 1300 curves. The lucky curve took 454 seconds to compute on a 500Mhz Dec Alpha EV6 from the Center for the Development of Parallel Scientific Computation.

Au bord du ciel et de la mer

N. Lygeros

Par son insupportable légèreté, la Grèce tient du ciel.
Une légèreté que nous pourrions qualifier de socratique.
Devant la gravité permanente du contexte historique,
la légèreté représente une sorte de survie.
Un moyen d'affonter le destin.
Le destin d'un peuple en quête d'absolu.
Un absolu nécessaire, celui de l'existence.
Chez nous l'existence diachronique est synonyme d'éternité de l'instant,
d'où la conscience de détenir un trésor lorsque nous parlons d'histoire.
Nous marchons avec légèreté afin de ne pas écraser nos vestiges.

Par la profondeur de son histoire, la Grèce tient de la mer.
Une histoire qui a la beauté de l'invisible.
Son caractère invisible n'est pas dû à l'obscurité
mais à l'accumulation de lumière ; un paradoxe alexandrin.
Comment voir dans la multitude du visible ?
Chaque parcelle de notre pays est chargée d'histoire.
Alors que vaut l'essentiel lorsque tout est important ?
Chez nous l'existence synchronique est synonyme d'omniprésence de l'histoire,
d'où la conscience de détenir un trésor lorsque nous vivons l'instant.
Nos pas sont profonds afin de toucher notre mémoire.

La force de la Grèce c'est d'être une frontière entre le ciel et la mer.
Un point de contact entre deux mondes bleus.
Les îles dans la mer, les cimes dans le ciel.
Une terre gorgée de lumière qui réchauffe son peuple.
Un peuple attaché à sa terre comme le langage à la pensée.
Notre langue est comme ce marbre antique
que nous retrouvons dans les églises byzantines et les forts vénitiens,
elle appartient à la structure fondamentale du Grec.
Le Grec qui, depuis des siècles,
contemple le ciel et la mer.

Ordinateurs et Démonstration

N. Lygeros

PRÉLUDE À DÉMONSTRATION

Nous allons analyser la structure logique des implications reliant les théorèmes et les lemmes de l'article [9]. Ceci dans le but de déceler une des premières interventions de l'ordinateur dans une démonstration de théorie des nombres.

Initialement l'intervention de l'ordinateur se situe dans la démonstration du lemme 3. En effet pour démontrer ce dernier, si l'on suit la méthode adoptée par Newman, on est amené à montrer par un calcul numérique standard que le polynôme suivant :
$r^8 - 134r^7 + 6496r^6 - 147854r^5 + 1709659r^4 - 10035116r^3 + 28014804r^2 - 29758896r + 6531840$ n'a aucune racine dans $\mathbf{Z}$. J.-P. Serre remarque alors que pour effectuer cela, l'ordinateur est indispensable. Ce qui est selon lui «désagréable».

Cela constitue un jugement assez général parmi les mathématiciens qui utilisent l'ordinateur avec la même réticence que l'axiome du choix et qui se sentent bien aise lorsqu'ils peuvent s'en passer. Mais du fait que l'ordinateur intervient dans une des extrémités du graphe des implications et que donc l'aspect «désagréable» se propage dans quasiment toute la démonstration, il est important d'éliminer son rôle.

Le mot désagréable utilisé à propos de l'ordinateur et surtout dans la définition de J.-P. Serre (correspondance personnelle) de la qualité d'une démonstration qui n'est pas sans rappeler des arguments à la Hermann Weyl - qui disait que dans son travail il avait toujours essayer d'unifier la vérité avec le beau et que quand il avait à choisir entre l'une ou l'autre habituellement il choisissait le beau.

En fait tout cela peut être considéré comme du purisme esthétique démodé ; tel Pierre Deligne qui répond à une question sournoise de David Ruelle en finissant par dire que ce qui l'intéressait personnellement c'étaient les résultats qu'il pouvait lui-même, et tout seul, comprendre dans leur entièreté. L'époque antique où les mathématiques représentaient la science du beau est totalement révolue. La beauté est un luxe que certains théorèmes ne peuvent s'offrir ; d'ailleurs peu nous importe la beauté seule la vérité compte.

Et que faire d'un théorème comme celui de Paris-Harrington, obtenu en 1977, qui est prouvable dans le cadre ensembliste usuel mais ne l'est pas dans le cadre seul des ensembles finis ? Si l'on reste sur des positions classiques l'on risque de se retrouver dans la même situation qu'André Weil lorsqu'il pensait que la mathématique courait le danger d'être étouffée par la foison des travaux médiocres et qui doit à présent avouer que celle-ci risque d'être étouffée par l'abondance de très bons travaux.

Des théorèmes qui n'obéissent pas à ces critères de qualité, il y en aura de plus en plus car nous avons besoin de savoir la vérité et non de voir la beauté.

Mais revenons aux conséquences que va impliquer l'attitude de J.-P. Serre quant à la démonstration du lemme. Repartant de l'énoncé du lemme, il explicite le fait qu'il s'agit de prouver que $p_r(10) \neq 0$ lorsque $r \equiv 2\ (mod 11)$. En remarquant alors que «le polynôme $r \rightarrow p_r(10)$ est à coefficients 11-entiers», J.-P. Serre réduit la difficulté calculatoire en utilisant une connaissance placée plus haut dans la hiérarchie de la complexité démonstrative. Ainsi le polynôme est «constant (mod 11) sur toute la classe modulo 11, et l'on a : $p_r(10) \equiv p_2(10)\ (mod 11)$».

Jusqu'à ce stade tout mathématicien normalement constitué en aurait fait de même. Cependant J.-P.Serre n'est pas n'importe quel mathématicien, aussi non content d'avoir trouvé une méthode qui élimine le rôle de l'ordinateur, il va s'efforcer de montrer que cette méthode est simple et surtout sans calculs. Et c'est là qu'il va aller trop loin - on ne peut tout de même pas l'accuser de ne pas en être conscient puisque c'est à ce moment précis qu'il va exploiter la puissance de la rhétorique.

En effet J.-P. Serre écrit : «il est immédiat que $p_2(10) = 1$» - tout en s'empressant à l'aide d'une parenthèse, d'en donner la raison ! Comme si un énoncé trivial avait besoin d'être justifié. De plus l'utilisation qu'il fait par la suite de l'expression «par exemple» implique l'existence de plusieurs raisons capables d'expliquer un fait immédiat.

Le problème de l'utilisation du mot «immédiat» provient sans doute du fait qu'en mathématiques ce mot comporte un aspect très subjectif. Pour la plupart des mathématiciens il convient d'utiliser ce mot lorsque ce que l'on affirme ne doit pas son existence à diverses théories très techniques. Ce qui est gênant dans cette approche c'est que l'utilisation du mot immédiat va dépendre de la connaissance mathématique culturelle de l'utilisateur. Ainsi voulant pallier ce manque d'universalité nous nous plaçons dans le cadre axiomatique de la théorie des nombres (si l'on suit jusqu'au bout ce raisonnement il faudrait partir des axiomes de Peano). De cette façon, ce qui est immédiat dépend directement des axiomes de la théorie considérée et d'eux seuls.

Et à présent le point d'orgue ; la raison : $p_2(10) = 1$ résulte «de la détermination explicite de $p_2(n)$». Cependant que peut bien signifier le mot «explicite» dans ce contexte ? Que la détermination de $p_1(n)$ et $p_3(n)$ le soit c'est évident, puisque l'on a les identités d'Euler et Jacobi :

$$\prod_{m=1}^{+\infty}(1-q^m) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{(3n^2+n)/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_1(n)q^n$$

$$\prod_{m=1}^{+\infty}(1-q^m)^3 = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n(2n+1)q^{(n^2+n)/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_3(n)q^n$$

mais l'on ne connait aucune formule de la sorte pour $p_2(n)$. Tout ce que l'on sait sur $p_2(10)$ c'est qu'il est différent de zéro (puisque d'après un résultat de J.-P. Serre on a : $p_2(10) \Leftrightarrow$ il existe un nombre premier $p \not\equiv 1(mod 12)$ dont l'exposant dans $1 + 12n$ est impair) et à part faire le produit suivant :

$$((1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)(1-q^6)(1-q^7)(1-q^8)(1-q^9)(1-q^{10}))^2$$

que l'on peut difficilement ne pas considérer comme un calcul, et regarder le 11ème coefficient du polynôme obtenu, on ne voit pas comment obtenir la valeur de $p_2(10)$ de façon immédiate.

Bien sûr, l'on peut utiliser l'identité d'Euler - connaissance mathémathique - et alors on doit développer le produit suivant : $(1 - q - q^2 + q^5 + q^7)^2$ qui bien que peu compliqué n'en demeure pas moins un calcul. Les autres méthodes que J.-P. Serre propose (correspondance personnelle) abondent dans ce sens puisqu'elles nécessitent soit la connaissance de la série de Dirichlet (avec en plus la compréhension de l'extension galoisienne associée), soit la connaissance des formes de types CM. Mais bien sûr, il n'est pas vraiment étonnant qu'un spécialiste de théorie des nombres comme J.-P. Serre considère l'utilisation de toutes ces notions comme élémentaire.

Et donc pour parvenir au but initial que s'était proposé J.-P. Serre c'est-à-dire obtenir la valeur de $p_2(10)$ sans calcul il faut être capable à partir de l'explicitation des exposants dans l'identité d'Euler de dire que l'équation diophantienne suivante : $(m,n) \in \mathbf{Z}^2$, $3m^2 + 3n^2 + m + n = 20$ n'admet qu'une unique solution à savoir $n = m = -2$. Procédure que l'on ne peut pas qualifier d'immédiate.

De cette analyse de l'approche de J.-P. Serre apparaît l'idée suivante. Du point de vue de la théorie de la démonstration - pour des problèmes finis - un calcul ne peut être éliminé ni par un autre calcul même si ce dernier est plus simple, ni par une procédure élémentaire dépourvue de calcul. La réduction de la difficulté calculatoire nécessite une augmentation de la complexité de la démonstration. Or cette augmentation ne peut être infinie, ainsi la capacité calculatoire détermine en quelque sorte les limites de la démonstration mathématique. On peut alors se poser la question suivante : de quelle façon l'introduction de l'ordinateur va modifier la notion de démonstration ? Ou plus simplement encore que signifie, DÉMONSTRATION ?

DÉMONSTRATION

Cette fois c'est un article de O. Lanford [7], que nous allons analyser pour comprendre une situation où le rôle de l'ordinateur bien qu'encore auxiliaire est plus important.

Ce qui est tout à fait remarquable dans l'énoncé des théorèmes de cet article c'est que l'on ne voit pas du tout comment O. Lanford est parvenu à s'aider de l'ordinateur pour les démontrer. En effet les théorèmes semblent indépendants de tout calcul et à part les bornes μ_∞ fournies dans le théorème 5, on ne trouve aucune indication de type numérique. La situation est même plus délicate encore car une lecture attentive des énoncés permet de voir qu'il s'agit de théorèmes de type existentiel : le théorème 1 sur l'existence d'une fonction, la proposition 2 sur celle d'un voisinage, le théorème 4 sur celle d'un entier et d'un élément d'une variété instable, enfin le théorème 5 sur celle d'un entier et d'une valeur paramétrique.

Ce cas de figure constitue un exemple caractéristique d'une des trois familles les plus naturelles de notre objet d'étude, la DÉMONSTRATION, qui sont : la Transformation, la Structuration, la Classification. Ici évidemment l'on a à faire à une démonstration de genre transformation, c'est-à-dire que la phase qui précède l'intervention proprement dite de l'ordinateur consiste en une transformation des énoncés mathématiques dépourvus de calculs en estimations calculatoires certes complexes pour l'homme mais immédiates pour l'ordinateur.

Cette transformation s'obtient au prix d'une explicitation des objets sur lesquels s'appuient les énoncés considérés. Ainsi on fait exprimer aux théorèmes le maximum d'informations qu'ils puissent posséder afin de pouvoir s'aider de l'ordinateur qui ne peut manipuler que des êtres concrets même s'ils ne le sont quelquefois que de manière implicite. Donc l'on décompresse l'information dense des théorèmes de mathématiques mais alors la conséquence immédiate de cette action est que la quantité d'informations ainsi obtenues dépasse de loin les capacités humaines et rend nécessaire l'assistance de l'ordinateur pour les gérer, les trier, puis les sélectionner. Bien sûr ces procédures sont élémentaires - du point de vue de l'ordinateur - cependant leurs manipulations ne le sont pas forcément. Néanmoins dans notre exemple qui est plus intermédiaire - entre les démonstrations classiques et celles où l'ordinateur intervient - qu'une véritable DÉMONSTRATION ce n'est pas le cas.

Pour conclure O. Lanford remarque que les calculs nécessaires à la démonstration des résultats annoncés sont justes à la limite de ce qui est vérifiable à la main. Plus exactement il considère qu'un ensemble minimal d'estimations choisi attentivement serait suffisant pour prouver les théorèmes 1 et 3 à l'aide seulement d'une calculatrice programmable en quelques jours. Cette justification de son approche est tout à fait significative ; en effet elle permet de déduire les ressentiments des mathématiciens d'alors envers des DÉMONSTRATIONS de ce genre. D'ailleurs le fait que Campanino, Epstein et Ruelle aient pu démontrer (c'est donc qu'ils ont essayé de le faire !) le théorème 1 par une autre méthode confirme cette opinion négative. Pourtant à l'instar du 19ème siècle avec les fonctions monstrueuses, le 20ème verra sans aucun doute une révolution conceptuelle provoquée par les DÉMONSTRATIONS qui bouleversera l'Empire Mathématique.

DÉMONSTRATION et empire mathématique

On appelle poset (partially ordered set) un ensemble P muni d'un ordre partiel. Lorsqu'il a n éléments et r relations de comparaison, c'est encore un graphe simple à n sommets et r arêtes, orienté et transitif. On obtient son dual en inversant ses arêtes, et lorsque c'est possible un conjugué en enlevant les r arêtes et en orientant transitivement les $(n(n-1)/2-r$ autres arêtes. Quant à sa dimension elle est égale au nombre minimum d'extensions linéaires dont il représente l'intersection. On dit qu'un poset est représentable par cercles si l'on peut lui associer une famille de cercles munie de l'ordre partiel d'inclusion dont les relations entre les éléments s'identifient avec celles que définit le poset.

Se pose alors la question de savoir dans quels cas un poset est représentable par cercles. Depuis longtemps, on sait que tout poset de dimension inférieur ou égale à deux est représentable par cercles. Mais l'on a aussi un résultat de Brightwell et Winkler [3] qui permet de déduire l'existence explicite d'un poset à 14 éléments qui n'est pas représentable par cercles. Dans ce chapitre nous allons nous attarder sur la démonstration du théorème suivant : tous les posets d'au plus 7 éléments sont représentables par cercles.

La contribution de l'ordinateur, quoique fondamentale, n'est pas évidente à localiser dans la démonstration, et pour cause elle est omniprésente ! Lorsque l'auteur écrit «Pour $n = 6$, après avoir utilisé le théorème [de Dushik et Miller] [...] il suffit d'étudier 2 posets...» il n'explique pas en quoi consiste réellement l'utilisation de ce théorème. Or une simple remarque numérique permet de constater le rôle primordial de cette utilisation. En effet pour $n = 6$ on a 318 posets non isomorphes or après cette mystérieuse, pour l'instant, utilisation de ce théorème il n'en reste plus que 2 à étudier.

Voici à présent la méthode utilisée. D'après le théorème de Dushnik et Miller on a : $(dimP \leq 2) \Leftrightarrow$ (P a un ordre conjugué), et par ailleurs l'on sait que les posets P de $(dimP \leq 2)$ sont représentables par cercles. Donc plutôt que de tester directement si un poset donné est représentable par cercles, l'on regarde s'il a un conjugué. Seulement cette procédure a du être appliquée aux 318 posets à 6 éléments et c'est l'ordinateur qui s'est chargé de ce travail. Il a agi de même pour $n = 7$, et cette fois il a traité 2045 posets en laissant 49 posets à étudier à la main.

Le lecteur curieux pourrait se demander pourquoi l'auteur n'a pas poursuivi sa méthode jusqu' à $n = 8$. Voici la réponse : lorsque $n = 8$ on a affaire à 16999 posets et une fois l'ordinateur utilisé il en reste encore 1141 à étudier. Or l'auteur a mis 2 jours pour traiter à la main les 49 posets qui restaient pour $n = 7$. Donc même en considérant que la difficulté est la même pour 8 sommets (ce qui est faux je vous l'assure !) il lui aurait fallu environ 46 jours de travail fastidieux ! (pour 9 sommets il en faudrait 532).

Ainsi pour faire mieux dans ce domaine si l'on conserve la même approche, qui est la seule jusqu'à présent à avoir donné des résultats, il faut soit découvrir de nouveaux théorèmes soit construire un algorithme performant qui permette de trouver lorsqu'elle existe une représentation par cercles d'un poset donné. Il est bien évident que le rôle de l'ordinateur sera encore plus grand que dans la deuxième possibilité, même si après une recherche forcément finie d'une représentation il faudra utiliser une autre méthode pour prouver que le poset considéré n'est pas représentable par cercles.

Néanmoins je pense que l'on peut aller plus loin si l'on change notre approche du problème et si l'on accepte bien sûr de donner à l'ordinateur un rôle encore plus grand. L'inconvénient principal de cette méthode - mais c'est aussi son originalité - c'est que malgré l'utilisation de l'ordinateur elle n'offrira qu'un résultat existentiel ! Voyons un peu de quoi il s'agit :

Il est évident qu'un ensemble de cercles dans le plan, une fois considéré par la relation d'inclusion constitue un poset et ce de façon univoque lorsque l'on regarde le problème à isomorphie près. Par ailleurs d'après le théorème de Brightwell et Winkler on sait qu'il existe des posets non représentables par cercles. Notons C_n le cardinal de l'ensemble des configurations non isomorphes en termes d'inclusion que peuvent avoir n cercles. On a alors l'inégalité suivante : $C_n \leq P_n$ et l'on sait que $C_k = P_k$ pour $k \in [1, ..., 7]$ et $C_{14} < P_{14}$.

Ainsi si l'on crée un programme qui calcule C_n, il suffira alors de comparer C_n avec P_n et l'existence de posets à m éléments non représentables découlera directement de : $C_m < P_m$.

Seulement si l'on regarde les valeurs de P_n pour $1 \leq n \leq 13$ ([4],[5],[6],[8]) à savoir : 1, 2, 5, 16, 63, 318, 2 045, 16 999, 183 231, 2 567 284, 46 749 427, 1 104 891 746, 33 823 827 452, on constate qu'elles deviennent vite énormes et en tout cas trop grandes pour un traitement à la main. Et si de plus il s'avère que pour les valeurs considérées C_n soit proche de P_n l'on se retrouvera devant une situation assez inconfortable. Car, par exemple, si C_n diffère pour la première fois de P_n et de peu pour $n = 13$ on saura qu'il existe parmi les milliards de posets possibles quelques posets non représentables par cercles sans pour autant pouvoir les déterminer du moins par cette méthode ! La seule chance que l'on pourrait avoir et donc où cette situation n'aurait pas lieu serait que $C_k = P_k$ pour $k \in [1, ..., 13]$, ce qui après tout n'est pas impossible.

Il faut tout de même pour finir cette partie, préciser que l'obtention d'un algorithme qui génère les C_n semble actuellement extrêmement difficile et ce même si l'on se contente de performances médiocres - qu'il faudrait de toute façon améliorer si l'on désire résoudre complètement ce problème.

Dans la partie précédente nous avons analysé une démonstration du genre «structuration» c'est-à-dire que la phase qui précède l'intervention proprement dite de l'ordinateur consiste à générer des structures à l'aide d'un calculateur - ce dernier peut être humain mais il semble évident que dans la plupart des cas ce sera une machine. Il est sans doute bon de préciser la nuance que nous utilisons entre les termes ordinateur et calculateur, au moins dans le présent article. Un calculateur ne fait que compter dans le sens classique du terme c'est-à-dire que même s'il dénombre des structures plus complexes que des nombres, il n'en retient que le nombre qui vérifiera une certaine propriété alors que l'ordinateur va conserver l'ensemble des nombres qui caractérisent les structures qu'il a générées de façon globale. Et à présent il doit sembler évident au lecteur que dans notre travail c'est bien à la notion d'ordinateur et non de calculateur que nous nous intéressons.

Essayons maintenant de comprendre pourquoi dans l'état actuel des connaissances dans ce domaine il est nécessaire d'avoir recours à l'ordinateur pour démontrer le théorème étudié. Du point de vue mathématique (classique) cette démonstration découle de seulement deux théorèmes celui de Dushnik et Miller et celui d'Hiraguchi qui semblent être du même genre mais nous allons voir que ce n'est pas le cas.

Dans les deux théorèmes intervient la notion de dimension. Mais comme le calcul de cette dernière lorsqu'elle est supérieure ou égale à 3 est un problème NP-complet ([10]) nous allons nous intéresser uniquement au cas où elle est inférieure ou égale à 2. Dans ce cas le théorème d'Hiraguchi nous apprend que les posets P à 4 ou 5 éléments vérifient : $dimP \leq 2$. Même si cela peut sembler être un piètre résultat il faut voir que du point de vue numérique il permet de savoir la dimension de $(16 + 63)$ posets en ne nécessitant pour ainsi dire aucun calcul puisqu'il suffit de connaitre la cardinalité du poset. Tandis que le théorème de Dushnik et Miller s'il est utilisé pour obtenir le même résultat est bien plus coûteux au niveau calculatoire puisque l'on est dans l'obligation de tester chacun des $(16 + 63)$ posets pour savoir s'ils ont un conjugué. La différence entre ces deux théorèmes provient de la connaissance du poset plus ou moins grande qu'il faut avoir pour les appliquer. Dans le premier il suffit d'avoir le nombre d'éléments alors que dans le second il faut non seulement connaitre les relations qui lient ces éléments mais aussi déterminer si le complémentaire (avec ses sommets et arêtes) est un conjugué. Cette différence apparait dans l'utilisation : celle du premier est immédiate - on dira que c'est un théorème effectif - alors que celle du deuxième fait rapidement intervenir l'ordinateur.

De manière plus générale l'on peut affirmer le principe suivant :

Si un théorème dépend de toute la structure de l'objet étudié alors pour rendre son utilisation effective il faudra sans doute l'ordinateur.

Il est bien évident que la véracité de ce principe dans le cas général est contestable, pour le voir il suffit de considérer un problème qui ne concerne que peu d'objets. Par contre si l'on a affaire à un grand nombre d'objets et s'ils sont un tant soit peu compliqués alors la puissance du principe devient flagrante. De sorte qu'il est préférable de l'énoncer sous une forme plus précise - mais un peu plus formelle :

Si une démonstration d'un théorème sur n objets (pour n suffisamment grand mais fini) nécessite l'utilisation d'un théorème qui dépend de toute la structure (suffisamment complexe) des objets auxquels il s'applique alors l'ordinateur sera nécessaire à sa réalisation.

Il semble que l'on puisse aller encore plus loin dans cette idée en augmentant soit le nombre n d'objets soit leur complexité car alors on en arrive à l'énoncé qui est inaccessible même à l'aide de l'ordinateur, du moins dans sa totalité. Par exemple l'on pourrait se retrouver dans la situation suivante qui représente bien sûr un cas particulier du précédent principe :

Si le problème général est indécidable alors le problème partiel rend l'ordinateur indispensable.

Il est bien évident qu'en se restreignant à des préoccupations générales comme nous l'avons fait l'on ne saurait obtenir comme résultats autre chose que des principes. De toute façon le but que nous désirons atteindre ici n'est pas de construire une théorie complétement axiomatisée du rôle de l'ordinateur au sein de la théorie de la démonstration. Nous nous contentons, du moins pour l'instant, seulement d'écrire les prémices de cette théorie de la DÉMONSTRATION.

Seconde DÉMONSTRATION

En ce qui concerne le théorème des 4 couleurs Appel et Haken ([1],[2]) sont convaincus par des analyses probabilistes qu'un ensemble inévitable beaucoup plus petit et contenant des configurations de beaucoup plus petite taille n'existe pas. De récents développements dans la démonstration du théorème des 4 couleurs qui ont simplifié la partie traitée par l'humain et non par l'ordinateur vont dans ce sens. Appel et Haken ont employé 1000 heures de temps de calcul à prouver la réductibilité des 1880 configurations de leur ensemble. Ils croient qu'il est possible de produire un ensemble qui exige seulement 200 heures pour la vérification. Mais ils sont sûrs qu'il est impossible de produire une telle preuve vérifiable à la main. Jean Mayer, un des grands experts en matière de réductibilité, ne croit pas que la tâche de vérifier un tel ensemble à la main soit praticable. Ainsi, si personne ne trouve une preuve plus simple sans utiliser d'ordinateur, il faudra admettre que le théorème des 4 couleurs exige une preuve que personne ne peut vérifier à la main même en y passant toute sa vie.

La solution exige une étude combinatoire d'autant plus complexe que les données logiques sont plus simples et peu susceptibles d'engendrer des théorémes généraux. Pour les mêmes raisons, l'ensemble inévitable de configurations réductibles ne peut se réduire à un petit nombre d'éléments. Enfin, la plupart des réductions auxquelles on aboutit sont impraticables à la main, vu le grand nombre de coloriages mis en jeu : on voit donc en quoi la démonstration du théorème, quoiqu'accessible à notre logique, dépasse par son ampleur les capacités de l'intelligence individuelle.

Elle illustre l'avènement d'un nouveau type de preuve mathématique. En effet, c'est la première fois, à notre connaissance, qu'un théorème impliquant par sa nature un nombre infini de cas se trouve ramené à une étude combinatoire finie, mais d'une ampleur telle que la preuve a nécessité plusieurs centaines d'heures d'ordinateur et que, même a posteriori, une vie d'homme ne suffirait pas à la rendre explicite.

Réflechissons un peu sur ce dernier point et analysons l'idée sur laquelle il est basé. Tout d'abord le problème initial concerne deux infinités, le nombre de cartes et le nombre de couleurs, qui ont bien sûr un rôle dissymétrique. Le problème est de trouver le plus petit nombre possible de couleurs tel que la propriété soit vérifiée. Il est trivial de montrer que ce nombre est supérieur ou égal à 4 et il est facile de montrer que ce nombre est inférieur ou égal à 5. Il s'agit donc d'un problème où l'on peut aisément obtenir une borne supérieure et une borne inférieure de la valeur recherchée. Par contre il n'est absolument pas trivial de montrer que la valeur est précisément 4. Pourquoi une telle différence de complexité ? Du point de vue théorique il est naturel que la minoration soit plus facile à obtenir puisque somme toute il ne s'agit que de trouver une carte qui nécessite un nombre donné de couleurs pour la colorier. Par ailleurs dans le cas présent la facilité d'obtenir une majoration provient non pas d'un raisonnement symétrique mais des contraintes imposées sur le graphe associé à la carte considérée par la formule d'Euler. Ainsi pour la valeur recherchée, la difficulté consiste bien à prouver l'égalité avec l'une des deux bornes, seulement ce problème concerne une infinité de cartes même en les traitant à isomorphie près. La méthode utilisée, du point de vue de la mathématique pure, va consister à rendre fini le nombre de cartes à étudier. Ce passage de l'infini au fini représente une étape fondamentale ; c'est sans aucun doute l'une des situations où l'on peut le mieux prendre conscience de la puissance de l'outil mathématique - on a d'ailleurs le même genre de finitisation pour la conjecture de Catalan grâce au résultat de Terjanian qui a été rendu explicite par Langevin.

Une fois cette étape cruciale franchie un autre problème apparait : le nombre de cas à traiter. Bien sûr si ce nombre est très petit, la gêne causée devient dérisoire. Mais qu'en est-il lorsqu'il est grand ? S'il est vraiment très grand et qu'il appartient aux nombres métaphysiques comme dirait F. Le Lionnais, l'on ne peut guère en dire quoi que ce soit puisqu'il est par définition inaccessible à toute méthode raisonnable. Par contre si ce nombre est accessible, cela dépend bien sûr du problème, et alors plusieurs difficultés méthodologiques apparaissent :

Tout d'abord comment faire pour réduire ce nombre ? Dans les cas les plus favorables il faut réitérer la méthode, cependant ils ne représentent pas la majorité. Dans les cas plus difficiles seul le changement de la méthode utilisée permet de réduire ce nombre. Mais dans les cas les plus difficiles on ne sait pas faire mieux, alors si cela est possible on fait appel à l'ordinateur. Ce qui a pour conséquence directe de donner un rôle important à ce dernier. Si celui-ci permet d'obtenir un contre-exemple, son rôle est effacé et l'on n'en parle plus que laconiquement. S'il permet de compléter la démonstration du théorème conjecturé alors dans un ultime effort l'on essaye a posteriori et en utilisant les résultats de ses calculs d'éliminer sa contribution. Pourtant dans le cas du théorème des 4 couleurs cette dernière tentative a échoué et l'on s'est retrouvé avec un résultat démontré grâce à l'ordinateur. Signalons à ce propos que les spécialistes omettent volontairement ou non de souligner la part euristique jouée par l'ordinateur dans ce problème, nous espérons d'ailleurs qu'avec notre article nous avons effectué une mise au point à ce sujet.

Ensuite lorsque l'on se trouve dans une situation où l'ordinateur a été indispensable, l'on est en droit de se demander si en utilisant une autre méthode (dans le futur) il aurait encore été nécessaire. En ce qui concerne le problème des 4 couleurs on sait grâce aux analyses probabilistes d'Appel et Haken que des variantes de la méthode utilisée seraient obligées d'employer l'ordinateur. Seulement cela n'est pas convaincant car il s'agit de méthodes trop proches pour résoudre le cas général.

C'est à ce niveau là que nous prenons le contre-pied de l'opinion majoritaire. Nous nous plaçons dans la problématique qu'aurait eue un épistémologue prégödelien fictif. Car si à l'époque de Gödel les mathématiciens n'ont point trouvé son théorème, cela ne provient pas tellement de la difficulté technique mais plutôt conceptuelle. En fait de façon plus concise l'on peut dire qu'ils ne réfléchissaient pas au bon problème. Ils s'étaient tous mis dans l'idée de chercher à unifier les mathématiques en les ramenant à une structure dont ils espéraient démontrer la cohérence sans se poser un seul instant la question de savoir si cela était seulement possible !

À notre époque certains mathématiciens s'acharnent à trouver des démonstrations où l'intervention de l'ordinateur est éliminée. Mais après tout il ne peut s'agir là que d'un acte de foi car l'on ne sait pas si cette procédure est possible dans le cas général.

Car de la même façon que l'on ne peut lutter contre les lois physiques, l'on ne peut guère lutter contre un fait mathématique (comme c'est le cas lorsque l'on a affaire à des structures indépendantes). Par exemple une des grandes réussites du 20ème siècle sur le plan mathématique a été la classification des groupes finis simples et donc aussi l'explicitation des groupes sporadiques, l'oeuvre de nombreux mathématiciens, qui ont travaillé pendant plusieurs décennies, dont la démonstration comporte actuellement plus de 15000 pages ! (Précisons à son propos que ce résultat est objectivement plus contestable que le théorème des 4 couleurs puisque plus sujet à l'erreur étant donné l'importance du rôle social entre les mathématiciens. Alors qu'aucun mathématicien n'émet de doute quant à la validité de sa preuve. Comme quoi le jugement des mathématiciens est extrêmement subjectif malgré la prétendue appartenance de leur domaine au monde des idées.) Mais que se serait-il passé si au lieu de 26 groupes sporadiques, il y en avait eu 260 ou 2600 ? Car l'esprit humain, et par conséquent les mathématiques qui en sont un des honneurs, a toujours tendance à unifier, à synthétiser les objets qu'il étudie pour mieux les comprendre, mais comment faire s'il y a à faire face à des structures véritablement indépendantes ? Comme c'est le cas avec P_{13} qui est égal à 33 823 827 452 ni plus ni moins !

Ainsi si l'on arrivait à démontrer qu'un problème comporte un grand nombre de structures indépendantes on montrerait du même coup la nécessité d'utiliser un ordinateur, si le nombre est accessible évidemment. Pour cela il faudrait montrer que quelque que soit la méthode utilisée, la donnée des structures à considérer est incompressible. Peut-être d'ailleurs que le théorème, qui démontrera la nécessité de l'utilisation de l'ordinateur pour démontrer un théorème sera lui-même démontré à l'aide de l'ordinateur ? Après tout lorsque l'on parle de fondements l'autoréférence est souvent au rendez-vous.

Pour finir essayons d'expliciter ce que nous avons voulu démontrer tout au long de ce cycle DÉMONSTRATION constitué de quatre parties. Nous avons examiné des problèmes où le rôle de l'ordinateur était croissant ce qui nous a amené à considérer le problème de la vérification qui lui-même nous a conduit à l'un des deux paramètres fondamentaux de la démonstration à savoir la longueur, l'autre étant la complexité.

Par ailleurs nous avons voulu mettre en évidence que du point de vue de la théorie de la démonstration, l'action de l'ordinateur intervenait de la même façon que l'utilisation d'un axiome. En effet l'alternative est simple : soit on utilise l'axiome de l'ordinateur c'est-à-dire que l'on se permet d'employer une procédure mécanique qui détermine si un ensemble fini, mais grand, de cas à considérer vérifie ou pas une certaine propriété, soit on exclut la possibilité et dans certains cas - comme celui du théorème des 4 couleurs - l'on n'arrive pas à prouver la vérité d'une conjecture.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Appel, W. Haken : *Every planar map is four colorable. Part I : Discharging.* Illinois Journal of Mathematics, volume 21, no3, p. 429-490, 1977

[2] K. Appel, W. Haken, J.Koch : *Every planar map is four colorable. Part II : Reducibility.*

Illinois Journal of Mathematics, volume 21, no3, p. 491-567, 1977
[3] G. Brightwell, P. Winkler: *Sphere orders.*
Order, volume 6, p. 235-240, 1989
[4] C. Chaunier, N. Lygerōs : *The number of orders with thirteen elements.*
Order, volume 9, p. 203-204, 1992
[5] C. Chaunier, N. Lygerōs : *Le nombre de posets à isomorphie près ayant 12 éléments.*
Theoretical Computer Science, n123 p.89-94, février 1994
[6] R. Fraïssé, N. Lygerōs : *Petits posets : dénombrement, représentabilité par cercles et «compenseurs».*
C.R.Acad.Sci.Paris, t.313, série I, p.417-420, septembre 1991.
[7] O.E. Lanford III : *A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures.*
Bulletin of the American Mathematical Society, volume 6, no3, p. 427-434, 1982
[8] N. Lygerōs : *Calculs exhaustifs sur les posets d'au plus 7 éléments.*
Singularité, volume 2, no4, p. 10-24, 1991
[9] J.-P. Serre : *Sur la lacunarité des puissances de η.*
Glasgow Mathematical Journal, volume 27, p. 203-221, 1985
[10] M. Yannakakis : *The complexity of the partial order dimension problem.*
SIAM Journal of Algebraic Discrete Methods, volume 3, no3, p. 351-358, 1982

An Exegesis of Promethean Myth

N. Lygeros, J.D. Martinez

Myths, legends and the like serve the purpose of kindling the flame of oral, cultural transmission by facilitating its conveyance from one generation to another. Myths helped illuminate and render Greek religion intelligible to worshippers by furnishing a wealth of religious background detail conceived in simple and picturesque terms. The Romans' functionally perceived deities had their counterparts in the more fully anthropomorphized oral and literary tradition of Greek mythology; including Greek epic poetry, theogony ("Divine Genealogy"), cosmogony, and allegory. One should bear in mind that Greek epic poetry is much more than a mere catalogue of matings and births of gods, rivers, planets, winds, and other abstract phenomena.

In the Greek language one of the etymological meanings of the name Prometheus is 'prometheia' or 'prnoia', which literally means pre-vision and is translated into English as 'forethought'. Prometheus is the one who reflects beforehand and he is sometimes referred to as the maker of mankind and a god of fire. He has also been referred to as the supreme trickster.

In Greek mythology Prometheus was the son of Iapetus (ΙΑΠΕΤΟΣ) and the ocean-nymph, Clymene. At this point there is already a difference between Hesiod and Eschyle. Prometheus had a double who can be considered to have been a kind of alter ego embodied in his brother, Epimetheus, who later became Pandora's husband. Epimetheus is translated as 'afterthought' or 'hindsight', i.e. the one who reflects a posteriori. They had another brother named Atlas. Prometheus and Epimetheus are like the two halves of a unique Janus-faced personage. As far as humanity is concerned, 'prometheia' is just one aspect of our complete ignorance of the future. Prometheus is 'poiklos and 'aiolmetis', whereas Epimetheus is 'harmartnoos'.Prometheus supported Zeus against his brother Titans. The Titans were one race of giant gods, the offspring of Uranus and Gaea, who were conquered and succeeded by the gods of Olympus. The latter imprisoned the former in Tartarus and also in Etna.

It is said that Zeus employed Prometheus to make men out of mud and water. Prometheus created mortals from clay, while Athena had breathed life into them. These mortals suffered from the pains of hunger and cold. Prometheus felt sorry for the plight of humanity, so he decided to steal fire from Heaven in order to give humanity this precious gift. This allowed our ancestors to use fire to keep warm and to build instruments hence enabling them to soften the impact of nature's harsh climate. In this way Prometheus tried to be more astute than Zeus by attempting to outwit and deceive him.

Zeus retaliated by sending Pandora to earth with her box of evils- but Prometheus understood the real reason for this 'poisoned' gift; the victim was Epimetheus and in this way Zeus took revenge on humanity. This was to counterbalance the gift of fire that Prometheus had previously made to mankind. Furthermore, Zeus punished Prometheus by chaining him to a rock on Mount Caucasus. An eagle daily devoured Prometheus' liver, which was made whole again at night so that the same thing could continue the following day. Prometheus endured this torment until he was released by Herakles (the Romans called him Hercules) who slew the eagle. Thus, Prometheus' punishment for stealing fire and defying the gods was their curse that has since then been passed on to the creatures (mortals) whom he created from mud and water in the first place.

In Homer's epic Odyssey, the mortals sailed the ship of Odysseus in a violent sea during Odysseus'(Ulyses') wandering after the war of Troy. The sailors passed by the seashores where seductive sirens sang to attract them to land, and amongst others they landed on the island of the witch-goddess. This would represent the journey of the universal wanderer seeking immortality and trying to escape the destiny-bound cycle of life and death. During the wandering the Promethean man is highlighted, seeking to refute Heaven and destiny, while sailing over the tumultuous waters of life and defiantly trying to escape from human suffering! A philosophical paradigm may be employed within which human life and health can be regarded as being like the existence of an abandoned,directionless vessel that is trying to establish a course while standing up to the adverse elements of nature en route.

Within this myth the eagle would appear to be associated with a nocturnal register rather than a diurnal kind of symbolism. There is no real association with eagles' habits but rather with the idea of darkness during the night being equated with negative thoughts, feelings, emotions, fear, and the dark side of human nature. As a matter of fact in Hesiodus' Theogony (v.523-524), we find the following sentence : "Et sur lui il lacha aussi un aigle aux longues ailes - et l'aigle mangeait le foie immortel, mais celui-ci s'accroissait d'une quantité en tout point égale,pendant la nuit, à ce que, durant le jour, mangeait l'oiseau aux longues ailes". Moreover "l'aigle est né d'ECHIDNA, la Vipère monstrueuse" (cf. Pierre Grimal). And its symbol is so negative that some authors prefer the expression : "vorace vautour". Thus Robert Graves writes : "De plus en plus irrité, Zeus fit enchainer Prométhée, nu, à une colonne dans une montagne du Caucase ou un vorace vautour lui dévorait le foie toute la journée, du début à la fin de l'année". Therefore, a solar interpretation does not appear to correspond to the eagle. On the other hand, people would often consider Prometheus' liver to be a solar symbol par excellence. The liver is considered immortal not only because it belongs to Prometheus but because the sun that is associated with Prometheus' liver is considered to be immortal, i.e. an everlasting source of energy or existing from the beginning of time and/or the universe.

We are aware of the importance attached to the liver by our ancestors (cf. heliocentric idea of the solar system). In a certain sense the essential thing is not so much the choice of the devoured organ but rather its acknowledged importance in the eyes of humanity. In other words, if the myth had been created after Michael Servetus' (1511-53) pioneering study and description of the pulmonary circulation of blood the devoured organ would most likely have been the lungs whereas after William Harvey's (1578-1657) discoveries concerning the circulation of the blood around the body, the chosen devoured organ would probably have been the heart. Without doubt the organ of choice nowadays would be the brain (cf. for example, the tale of the man with a golden brain by Alphonse Daudet).

In effect, the relevance of the organ that is considered to be of vital importance to human beings can be traced back to, and associated with, the moment in history in question and its concomitant scientific development. Galen of Pergamum, also known as Claudios Galenos (b.AD 129 d. circa AD 199) was the distinguished physician of antiquity who founded experimental physiology. Galen believed that the four bodily humours; blood, phlegm, yellow bile, and black bile were supposed to give rise to the sanguine, phlegmatic, choleric, and melancholic temperaments, respectively. Thus, human health was thought to require an equilibrium between these four humours. This constituted a continuation of the earlier Hippocratic conception of the unity of the organism(cf. atomic view).There was also an epoch when the stomach was considered to be a fundamental organ, the seat of all human emotions, i.e. the temper or spirit.Thus, chronologically-speaking the order of scientific importance attached to various human organs could be as follows:

$Liver- > gall - bladder- > stomach- > lungs- > heart- > brain- > mind- > consciousness.$

The inhabitants of the Greek Islands still transport fire from one place to another on a giant fennel and Prometheus chained on Mount Caucasus is perhaps a legend that the Hellenic people keep alive or they emigrated from the Caspian Sea in order to give themselves up in Greece: "that gigantic ice cap lying in the snow of the mountain peaks and surrounded by vultures" (cf. Robert Graves).

Another possible interpretation of the myth of Prometheus is that he is said to have been an astronomer who went up Mount Caucasus and stayed there all night in order to make some observations. The myth came about due to the lack of understanding of his close friends and relatives in an attempt to search for the etymological meaning of man. As a matter of fact, one of the plausible etymologies of the Greek word for man (ΑΝΘΡΩΠΟΣ) is; 'the one who looks up'(an implicit reference to the sky) and above all, an "acte gratuite", in other words, not indispensible to humanity's survival and yet an act that distinguishes human beings from other animals. Within this alternative framework we can observe the same type of amalgamation that led to the creation of the myth of the centaurs. In sum, the centaurs (ΚΕΝΤΑΥΡΟΣ) were veteran knights who lived in the Pelion, a mountain located near Mount Ossa in Thessaly, Greece.

The compelling image of Prometheus, the astronomer looking up to observe the sky at the summit of Mount Caucasus, could be taken to represent the human race. It is our feeble attempt to comprehend the immensity of the far-away space and heavens and the vast universe that exists in relation to our nearby terrestrial world and mundane existence on this planet.

Prometheus loved humankind and this is evinced by displays of hyper altruistic behaviour and he is the symbol of the well-minded and good-spirited (ΑΚΑΚΗΤΑ ΠΡΟΜΗΘΕΥΣ; Prométhée sans malice ΗΣΙΟΔΟΣv. 614).

Aristotelian duality provides us with a clear inter-relationship between the two states represented by the psyche and the material world. The conceptualization of the Physis and the marked influence of Pre-Socratic thought(involving the four elements; earth,wind,fire,and water) tend to provide a vision of the universe that is constantly changing, whereby these changes both originate from and are fuelled by the Physis itself.

Orozco (1883-1949) portrayed Prometheus as a monumental pseudo- Michelangelesque giant, straining his powerful muscles against the burden of his fate. Prometheus was the self-sacrificing, creative man ("Man of Fire") providing humanity with fire which enlightens,liberates, and purifies but also consumes!

REFERENCES.

Paul Faure : Private communication.

Pierre Grimal : La mythologie grecque. Presses Universitaires de France,1953.

Robert Graves : Les mythes grecs. Pluriel Fayard, 1967.

ΗΣΙΟΔΟΣ: ΘΕΟΓΟΝΙΑ.

ΑΙΣΧΥΛΟΣ: ΠΡΟΜΗΘΕΥΣ ΔΕΣΜΩΤΗΣ.