Les hypergroupes d'ordre 3

R. BAYON, N. LYGEROS*

29 décembre 2004

dédié à Frédéric Marty

Institut Girard Desargues
Département de Mathématiques, Université Lyon 1
43 Bld du 11 Nov. 1918, F-69622 Villeurbanne Cedex
FRANCE

*Recherche effectuée en tant que Professeur invité à l'Université de Thrace-Grèce.

Résumé

Dans cet article, nous présentons tout d'abord des résultats qui mettent en relation les posets et les P-hypergroupes de Vougiouklis via la notion fondamentale de groupe d'automorphismes. Ensuite nous exploitons cette dernière et des propositions sur la nature des hypergroupes de Marty afin de partitionner, énumérer et classifier les hypergroupes d'ordre 3 qui représentent 3999 entités deux à deux non isomorphes.

Mots-clefs :

classification, énumération, groupe, groupe d'automorphismes, hypergroupe, P-hypergroupe, poset.

Introduction et historique

Dans l'article de Frédéric Marty [18] qui date de 1934, l'auteur mentionne explicitement que c'est sa recherche sur les groupes de fonctions algébriques qui l'a conduit à généraliser la notion de groupe. Après avoir défini le produit de deux fonctions comme la composition, il remarque que si celles-ci ne sont pas toutes deux des fonctions uniformes, la composition peut représenter plusieurs fonctions distinctes. L'exemple qu'il considère est d'une part frappant de simplicité d'autre part révélateur du caractère fondamental de la notion d'hypergroupe. L'exemple est le suivant : si $g = z^2$ et $f = \sqrt{z}$ alors $f(g)$ comprend $+x$ et $-x$. Il n'existe pas de mathématicien qui n'ait été confronté à cette difficulté. Cependant c'est à Frédéric Marty que nous devons l'abduction qui a créé les hypergroupes. Ce visionnaire du domaine remarqua que le même type de difficulté apparaît dans la théorie des groupes continus de transformations lorsque nous voulons les prolonger au voisinage d'un point critique algébrique de la transformation.

La construction historique des hypergroupes s'effectue à partir de la notion de division à droite et à gauche (en termes plus modernes, il s'agit de la simplification) qui est reliée à celle de multiplication par le théorème suivant : si l'une au moins des divisions est uniforme, la multiplication est uniforme. De ce résultat, nous déduisons un corollaire qui est classique en théorie des groupes à savoir : si dans un hypergroupe l'une des divisions est uniforme, l'autre est aussi uniforme et l'hypergroupe est un groupe. Ensuite, il entreprend la construction des hypergroupes complètement réguliers qui vérifient la propriété suivante : à chaque élément A on peut associer un élément A^{-1} son inverse tel que E était l'élément neutre, $AA^{-1} \supset E$, $A^{-1}A \supset E$. De même dans un autre article [19] qui date de 1935, il ne se place jamais dans une situation commutative afin d'être le plus générique possible, même s'il généralise la notion d'élément neutre par un système qui le contient sans traiter le cas où il n'existe pas. De plus, il retrouve les principaux lemmes de réduction, isomorphie et homomorphie de la théorie du groupe quotient et des sous-groupes invariants. En quelques pages, il établit tout ce qui est nécessaire pour construire la théorie des hypergroupes sans rechercher pour autant ni la cyclicité qui sera introduite par H.S. Wall [29] en 1937, ni la commutativité des nouvelles entités mathématiques. Il opère dans ces articles une abduction fondamentale tout en conservant son objectif principal à savoir traiter les problèmes où apparaissent des fonctions multiformes. Ces dernières forment donc le substrat théorique sur lequel se base la duplicité qui caractérise les hypergroupes [20, 9, 10].

1 Définitions et notations

Définition 1 (F. Marty [18]). *$< H, . >$ est un hypergroupe si $(.) : H \times H \to p(H)$ est une hyperopération associative pour laquelle l'axiome de reproduction hH=Hh=H est valide pour tout h de H.*

L'affaiblissement relatif de la caractéristique neutre puisqu'elle a fini par être délocalisée sur l'ensemble des éléments de l'hypergroupe, a eu pour conséquence de faire apparaître une explosion combinatoire. En effet le nombre maximal d'opérations potentielles pour un groupe d'ordre n est égal à $n^{(n-1)^2}$ tandis que le nombre maximal d'opérations potentielles pour un hypergroupe d'ordre n est égal à $(2^n - 1)^{n^2}$.

Par la suite Th. Vougiouklis [24] a introduit une nouvelle classe d'hypergroupes construite à partir des groupes de la manière suivante :

Définition 2. *Soit $G =< G, * >$ un groupe et $P \subset G, P \neq \emptyset$; alors $G_P =< G, *^P >$ est un P-hypergroupe s'il est muni de l'hyperopération suivante : $*^P : (x, y) \to x * P * y$*

Cette classe a été étudiée par M. De Salvo [11] avec une restriction sur la longueur et la commutativité et de manière plus étendue par Th. Vougiouklis [25, 26] et en particulier pour 3 éléments [28] avec S. Spartalis. Comme l'a remarqué l'un des auteurs [16] l'introduction de l'axiome de reproduction est le point central de cette nouvelle approche de la théorie puisque l'associativité était déjà présente. Notre habitude à traiter les groupes de manière globale ne met pas en évidence ses particularismes. L'un de ces particularismes est constitué par la présence de l'élément neutre. Il est vrai que ce dernier est souvent considéré comme un élément sans véritable intérêt pour le groupe alors qu'il est bien sûr fondamental pour la loi du groupe. Une façon de le constater c'est de mettre l'accent sur l'aspect projectif i.e. l'existence d'un élément qui vérifie $aa = a$. En effet l'élément neutre vérifie nécessairement cette propriété aussi nous n'y prêtons pas suffisamment attention. Cependant ce fait représente l'ultraspécialisation de la caractéristique de l'élément simple e à savoir : $\forall x \in G$ nous avons $xe = ex = x$. Cette fois nous pouvons remarquer que bien que nous considérions le groupe de manière globale nous exploitons en réalité une propriété locale car dans la propriété énoncée l'élément neutre est l'unique élément à la vérifier. Ainsi si nous désirons donner au groupe toute sa dimension globale, nous devons pour ainsi dire délocaliser cette propriété. Et une des manières les plus élégantes de le faire, c'est d'introduire l'axiome de reproduction. Nous voyons donc que l'axiome de reproduction globalise le rôle de l'élément neutre. Sans rechercher à localiser l'information de l'opération, il introduit une hyperopération qui est globalement invariante quant à l'engendrement de la structure. Il généralise classiquement le x en le transformant en H et il modifie non classiquement le e afin d'accéder au x. Par ce biais le groupe devenu hypergroupe perd le particularisme de la neutralité. Ainsi les éléments de l'hypergroupe sont potentiellement de même nature et ils ont tous une action. Dans cette optique-là, il est alors plus naturel de se différencier des hypergroupes cycliques qui ramènent par un autre biais le particularisme. Bien que ces derniers soient plus abordables par nature puisqu'ils constituent une généralisation classique de la cyclicité, il n'en demeure pas moins que nous considérons qu'ils n'appartiennent pas à la même mentation même s'ils remettent en cause pour certains l'implication spécifique aux groupes quant à la cyclicité et la commutativité. C'est pour cette raison que nous affirmons l'importance de la recherche à effectuer dans le domaine des hypergroupes non cycliques afin de mettre en évidence des propriétés plus profondes de l'axiome de reproduction. Même s'il existe une difficulté combinatoire pour aborder les hypergroupes dans leur ensemble ce n'est pas une raison suffisante pour spécialiser nos approches, mais au contraire une raison qui rend nécessaire le changement de phase. Les hypergroupes via le caractère global de l'axiome de reproduction constituent un véritable défi holistique pour notre pensée mathématique.

2 Posets, groupes et hypergroupes

Définition 3. *Un poset (partially ordered set) $P = (P, \leq)$ est un ensemble P muni d'un ordre partiel $\leq$.*

2.1 Théorèmes

Soient G un groupe fini ($|G| = n$) et P un poset fini ($|P| = a$). Birkhoff a montré :

Théorème 1 (G. Birkhoff [4]). *Si G est un groupe alors il existe un poset dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à G.*

Dans un autre théorème il explicite la taille d'un poset en fonction de la taille du groupe.

Théorème 2 (G. Birkhoff [4]). *Si G est un groupe fini de cardinal a alors il existe un poset dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à G et son cardinal est égal à $a^2 + a$.*

Dans les travaux de C. Chaunier et N. Lygeros sur l'énumeration des posets [6, 5, 7] précédés par les résultats théoriques de R. Fraïssé et N. Lygeros [12], il est apparu que la notion de groupe d'automorphismes était fondamentale comme l'avait suggéré un résultat de Prömel [22] sur les posets.

Un premier théorème de C. Chaunier et N. Lygeros [8] précise les liens entre le nombre n de sommets d'un poset et l'ordre a de son groupe d'automorphismes, en donnant la valeur minimale de n et la structure explicite du poset minimal lorsque a est fixé et premier. Ces résultats améliorent ceux de Birkhoff.

Théorème 3 (C. Chaunier-N. Lygeros [8]). *Soit a un nombre premier et n le nombre minimal de sommets des posets ayant un groupe d'automorphismes d'ordre a. Alors :*

(i) $n = a$ *si* $a = 2$ *;*
(ii) $n = 3a$ *si* $a = 3, 5$ *ou* 7 *;*
(iii) $n = 2a$ *si* $a \geq 11$

des posets réalisant le minimum et possédant aussi un nombre minimal de relations sont respectivement :

(i) $(\{x_0, x_1\}, <)$ *avec* x_0 *et* x_1 *incomparables ;*
(ii) $(\{x_0, ..., x_{a-1}, y_0, ..., y_{a-1}, z_0, \ldots, z_{a-1}\}, <)$ *avec* $x_i < y_i < z_i$ *et* $x_i < z_j$ *si* $j - i = 1 \ (mod\, a)$ *;*
(iii) $(\{x_0, ..., x_{a-1}, y_0, ..., y_{a-1}\}, <)$ *avec* $x_i < y_j$ *si* $j - i = 0, 1$ *ou* $3 \ (mod\, a)$.

En 1996, N. Lygeros et M. Mizony ont amélioré la valeur donnée par G. Birkhoff pour une classe plus vaste de groupes finis et de manière constructive.

Théorème 4 (N. Lygeros-M. Mizony [17]). *Si G est un groupe fini de cardinal a, non produit direct de deux groupes, engendré par des éléments d'ordres deux à deux distincts, alors il existe un poset dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à G et dont le cardinal est égal à $3a$.*

2.2 Nouveaux théorèmes

Ces relations entre posets et groupes peuvent être transposées aux P-hypergroupes.

Théorème 5. *Un poset P_0 peut être associé à chaque P-hypergroupe.*

Démonstration. Par la définition de P-hypergroupe nous avons : $G \leftrightarrow < G, P* >$ P-hypergroupe et grâce au théorème de G. Birkhoff [4] nous pouvons associer un poset P_0 à un groupe G via son groupe d'automorphismes $Aut(P_0)$. Donc nous avons : $P_0 \leftrightarrow Aut(P_0) \cong G \leftrightarrow < G, P* >$ □

Les démonstrations des théorèmes suivants sont analogues.

Théorème 6. *Un poset P_0 de cardinal $a^2 + a$ peut être associé à tout P-hypergroupe $< G, P* >$ et avec G de cardinal a.*

Théorème 7. *Soit a un nombre premier, $< G, P* >$ un P-hypergroupe et G un groupe de cardinal $a = 2$ ou $3, 5, 7$ ou 11 et plus alors il y a un poset P_0 associé de cardinal respectivement a ou $3a$ ou $2a$ dont le groupe d'automorphismes est a.*

Théorème 8. *Soit $< G, P* >$ un P-hypergroupe et G un groupe fini de cardinal a, non produit direct de deux groupes, engendré par des éléments d'ordres deux à deux distincts, alors il existe un poset dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à G et dont le cardinal est égal à $3a$.*

3 Groupe d'automorphismes

En parcourant l'étendue du spectre de la théorie des groupes ne serait-ce que via les groupes d'isométries, les groupes de Galois et les groupes d'homologie, nous ne pouvons manquer de constater le rôle classifiant de celle-ci. Cela provient sans doute de la notion de stabilité et celle de symétrie qui caractérisent l'entité des groupes mais aussi de l'idée que des structures quelconques se laissent toujours "grouper" (au sens d'Evariste Galois). Ce n'est qu'en étudiant des structures plus larges comme celles des anneaux que nous pouvons saisir la profondeur de cette remarque puisque celles-ci ne se laissent définir que dans quelques cas spéciaux. C'est aussi pour cette raison qu'il est important d'approfondir nos connaissances encore élémentaires dans le domaine de la théorie des hypergroupes puisque ces derniers sont d'excellents candidats pour supporter les généralisations possibles.

Donc l'importance des groupes provient de la notion de groupe d'automorphismes. Cette dernière bien qu'*a priori* une famille particulière de groupes représente en réalité le moyen pour les groupes, d'agir sur le monde extérieur en captant une information qui ne représente pas seulement la redondance interne de la structure. Car cette apparente redondance cache justement une structure de groupe puisque cette redondance s'effectue d'une certaine manière. Le groupe d'automorphismes apparaît donc comme la mémoire de la redondance. Cependant, il ne représente pas seulement un rangement mais un mode de rangement.

De plus, sa structure même est plus riche que la simple connaissance du rangement car elle comporte la dynamique de la structure initiale. Le groupe d'automorphismes permet d'appréhender la rigidité de la structure, fait qui nous donne des informations supplémentaires qui peuvent être utiles pour une étude ultérieure et spécifique. La puissance de la notion de groupe d'automorphismes provient aussi de l'exploitation qui en a été faite par la théorie de G. Pólya dans le cadre des problèmes énumératifs [21].

En effet l'exploitation du groupe d'automorphismes d'une structure donnée permet de créer une approche du type fonctions génératrices et par ce biais d'atteindre son substrat sans augmentation de complexité annexe comme s'il s'agissait d'une simple règle de réécriture. Cela n'est pas sans rappeler la notion d'univers clos [15] puisque la stabilité du groupe évite toute action de et du monde extérieur. La notion de groupe d'automorphismes consiste en un redéploiement d'une approche holistique mais intrinsèque à la structure. Via la redondance, le groupe d'automorphismes est aussi un indicateur efficace de la complexité de l'objet donné s'il est croisé avec des informations internes. Ainsi via son caractère générique, le groupe d'automorphismes permet d'atteindre des structures plus complexes que celles des groupes mais dont le comportement interne est la même nature. Et c'est dans ce sens que nous considérons qu'il s'agit d'une notion centrale en mathématiques [14].

Définition 4. *Un hypergroupe rigide est un hypergroupe dont le groupe d'automorphisme est trivial.*

Proposition 1. *Il n'existe que deux hypergroupes rigides d'ordre 2.*

Démonstration. Soit $< H = \{a, b\}, . >$. Comme ab doit être stable sous l'action de S_2 via l'associativité, nous avons : $\{a, b\} \subseteq ab$. Idem pour ba. Ainsi $ab = ba = \{a, b\} = H$. Quand à xx, pour l'ordre 2, nous n'avons que deux choix $xx = x$ ou $xx = H$ car $xx = y \Rightarrow yy = x$ or $x(xy) = (xx)y$, $xH = yy$, $H = x$ Absurde. Nous n'avons donc que deux hypergroupes rigides potentiels i.e.
$aa = \{a\}$, $ab = H$, $ba = H$, $bb = \{b\}$ et $aa = H$, $ab = H$, $ba = H$, $bb = H$ et ce sont tous les deux des hypergroupes l'un projectif et l'autre cyclique d'ordre 2. □

Proposition 2. *:* $< H, \cup >$ *est un hypergroupe rigide.*

Démonstration. Axiome de reproduction : $a \cup H = H \cup a = H$
Associativité : $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$
Rigidité : $< H, \cup >$ est commutatif puisque $a \cup b = b \cup a$
$< H, \cup >$ est projectif puisque $\forall x \in H$, $xx = x$
L'union est stable sous l'action du groupe symétrique.

□

De manière analogue nous montrons :

Proposition 3. $< H, . > : \forall x \in H,\ xx = x$ *et* $\forall (x, y) \in H^2\ \ x \neq y\ xy = H$ *est un hypergroupe rigide.*

Proposition 4. $< H, . > : \forall (x, y) \in H^2\ xy = H$ *est un hypergroupe rigide.*

Proposition 5. $< H, . > : \forall x \in H,\ xx = \mathcal{C}_H x$ *et* $\forall (x, y) \in H^2\ x \neq y\ xy = x \cup y$ *est un hypegroupe rigide.*

Théorème 9. *Il n'existe que six hypergroupes rigides d'ordre 3.*

Démonstration. Nous présentons les hypergroupes $< H = \{a, b, c\}, . >$ sous la forme de 9-uplets $(aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc)$. Considérons d'abord la notion de complétion. Il s'agit de compléter le résultat de l'hyperopération en lui adjoignant les éléments non présents quand $x \neq y$. En utilisant la classification de Vougiouklis comme germe d'hypergroupes rigides et les certificats des propositions précédentes, nous n'avons que deux hypergroupes rigides projectifs l'union et sa complétion i.e.
$H_1 = (\{a\}, \{ab\}, \{ac\}, \{ab\}, \{b\}, \{bc\}, \{ac\}, \{bc\}, \{c\})$ et $\overline{H_1} = (\{a\}, H, H, H, \{b\}, H, H, H, \{c\})$ et quatre hypergroupes rigides cycliques, l'exclusion et sa complétion ainsi que la totalité et sa complétion i.e.
$H_2 = (\{bc\}, \{ab\}, \{ac\}, \{ab\}, \{ac\}, \{bc\}, \{ac\}, \{bc\}, \{ab\})$ (exclusion car $xx = \mathcal{C}_H x$)
$\overline{H_2} = (\{bc\}, H, H, H, \{ac\}, H, H, H, \{ab\})$ (complétion de l'exclusion)
$H_3 = (H, \{ab\}, \{ac\}, \{ab\}, H, \{bc\}, \{ac\}, \{bc\}, H)$ (totalité car $xx = H$)
$\overline{H_3} = (H, H, H, H, H, H, H, H, H)$ (complétion de la totalité)

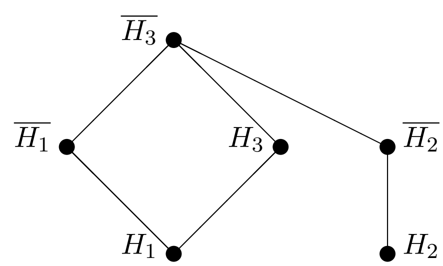
□

Définition 5 (Th. Vougiouklis [27]). *Soit $< H, . >$ et $< H, * >$ deux hypergroupes. Nous disons que $(.)$ est inférieure ou égale à $(*)$, et le notons $\leq$, si et seulement s'il existe $f \in Aut(G, *)$ tel que $xy \subseteq f(x * y)$ pour tout x, y de G.*

Remarque 1. *Cette définition fut initialement utilisée dans les H_v-groupes, où l'associativité est remplacée par une associativité faible.*

Remarque 2. *Dans le cas de la complétion nous avons : $H_i \leq \overline{H_i}$. Et plus explicitement l'ordre partiel défini sur les H_i et $\overline{H_i}$ peut être représenté par le diagramme suivant :*

Diagramme de Hasse



Pour les hypergroupes rigides projectifs, l'hypergroupe de l'union est minimal. Pour les hypergroupes rigides, l'hypergroupe de la complétion de la totalité est maximal. Nous voyons donc que pour les hypergroupes, il est plus normal de considérer le résultat de l'hyperloi que les éléments de l'hypergroupe considéré puisque la structure ensembliste est plus riche et permet l'existence d'une classification.

4 Cyclicité et Projectivité

Définition 6 (H.S. Wall [29]). *Un hypergroupe $(H, .)$ est cyclique de période finie par rapport à un élément h de H s'il existe un entier v tel que $H = h^1 \cup h^2 \cup \cdots \cup h^v$.*

Définition 7. *Un élément x de $< H, . >$ est projectif si et seulement si $xx = x$. $< H, . >$ est dit projectif si tous ses éléments sont projectifs.*

En théorie des groupes élémentaire la notion de cyclicité est fondamentale car les groupes cycliques représentent d'une part les groupes les plus accessibles et ceux dont on a une bonne connaissance et d'autre part des exemples concrets de groupes simples. Par nature les groupes cycliques sont constitués d'un seul élément générateur générique. En d'autres termes, tout élément d'un groupe cyclique peut être interprété comme une puissance particulière de l'élément générique. Ainsi le caractère abélien du groupe cyclique est immédiat puisque cela revient à utiliser la commutativité des puissances. Nous en déduisons donc que l'ensemble des groupes cycliques est inclus dans l'ensemble des groupes abéliens. Cette proposition malgré son caractère élémentaire cache néanmoins via la profondeur de la cyclicité une complexité noétique.

En effet, à l'ordre 2, il existe 2 hypergroupes cycliques au sens de H.S. Wall [29], qui ne sont pas commutatifs. Plus précisément il s'agit de :

$$aa = H, ab = H, ba = \{a\}, bb = \{b\}$$

$$aa = H, ab = \{a\}, ba = H, bb = \{b\}$$

Ainsi la notion de commutativité ne découle pas de manière générale de la cyclicité. Nous voyons donc que la théorie des groupes élémentaire en forçant l'existence d'une propriété locale cache la possibilité d'existence d'une propriété globale sans aspect local et qui ne puisse pas générer la commutativité. Il est donc clair qu'une entité nettement postérieure en termes de création aux notions de commutativité et de cyclicité permet d'observer sous un angle nouveau une entité antérieure puisque la proposition sur l'implication de la commutativité par la cyclicité ne supporte pas la généralisation qui transforme un groupe en hypergroupe. Aussi si nous suivons la méthodologie introduite par A. Grothendieck pour démontrer un théorème, nous devons exclure l'utilisation de cette proposition de nos heuristiques. Et il en est de même pour la proposition qui affirme que deux groupes cycliques du même ordre sont isomorphes puisque nous avons obtenu sept hypergroupes cycliques non-isomorphes et qui ont pourtant le même ordre.

Théorème 10 (N. Lygeros [13]). *Le plus petit hypergroupe, non-commutatif et non-cyclique est d'ordre 3.*

Démonstration. Pour le vérifier il suffit de considérer l'hypergroupe $< H = \{a, b, c\}, . >$ défini par $\forall x$, $xx = x$ et $\forall (x, y)\, x \neq y$, $xy = H$ sauf $ab = \{a, b\}$, et de voir que dans la classification de Th. Vougiouklis [23], il n'existe pas de plus petit exemple. □

Proposition 6. *Si H est un hypergroupe de longueur 1 et un de ses éléments vérifie la propriété projective alors H est un groupe.*

Démonstration. Soit a tel que $aa = a$. Comme (.) est associative nous avons a(ab)=(aa)b et comme H est de longueur 1 posons $ab = x$, nous obtenons $ax = ab = x$. Comme (.) vérifie l'axiome de reproduction x ne peut être différent de b donc $x = b$. Ainsi a est neutre à gauche pour tout élément de H. Par raisonnement analogue, à partir de $b(aa) = (ba)a$ nous montrons que a est neutre à droite. Ainsi a est élément neutre et donc H est un groupe. □

Proposition 7. *Si H est un hypergroupe de longueur 1 alors il a un élément projectif.*

Démonstration. Via l'axiome de reproduction nous avons $xy = xz \Rightarrow y = z$ sinon nous ne pouvons avoir l'ensemble H. Pour la même raison quel que soit x de H, il existe un a tel que $xa = x$. Nous avons donc $(xa)a = xa = x$, comme (.) est associative $x(aa) = (xa)a$ donc il existe un élément a tel que $aa = a$. □

Théorème 11 (F. Marty). *Un hypergroupe de longueur 1 est un groupe.*

Démonstration. La combinaison des propositions 6 et 7 permet de démontrer de manière élémentaire le théorème de Marty. □

Cette façon de procéder nous permet d'aboutir au théorème 11 sans utiliser le théorème de Marty à savoir que tout hypergroupe simplifiable d'un côté est un groupe. De plus dans la section suivante, nous verrons que la notion de projectivité est non seulement fondamentale mais aussi efficace sur le plan énumératif. Ainsi nous voyons que la propriété projective peut jouer un rôle important dans l'obtention de résultats sur les hypergroupes.

5 Partitions et Enumération

Nous partitionnons donc les hypergroupes dans 6 classes différentes :
- cycliques et abéliens ;
- cycliques et non abéliens ;
- non cycliques projectifs et abéliens ;
- non cycliques projectifs et non abéliens ;
- non cycliques non projectif et abéliens ;
- non cycliques non projectifs et non abéliens.

5.1 Hypergroupes d'ordre 2

Nous retrouvons les résultats de Vougiouklis avec des étapes intermédiaires différentes. Plus précisément, il existe 81 hypergroupes potentiels, 35 candidats vérifient l'axiome de reproduction et 30 sont associatifs. Finalement il existe 14 hypergroupes d'ordre 2 auxquels il est nécessaire d'appliquer un test d'isomorphie.

Théorème 12 (Th. Vougiouklis [23]). *Il existe 8 hypergroupes d'ordre 2 non isomorphes deux à deux.*

Ci-dessous, nous faisons la liste des hypergroupes d'ordre 2, en les présentant sous la forme de quadruplets (aa, ab, ba, bb) avec $H = \{a, b\}$.

Liste des hypergroupes d'ordres 2

Hypergroupe	Ordre du groupe d'automorphismes
(a, b, b, a)	2
(a, b, b, H)	2
(a, b, H, H)	2
(a, H, b, H)	2
(a, H, H, b)	1
(a, H, H, H)	2
(b, H, H, H)	2
(H, H, H, H)	1

5.2 Hypergroupes d'ordre 3

Il existe à l'ordre 3, 40353607 hypergroupes potentiels, 10323979 candidats vérifient l'axiome de reproduction et 28111 sont associatifs. Il existe enfin 23192 hypergroupes d'ordre 3 auxquels il est nécessaire d'appliquer un test d'isomorphie.

Théorème 13. *Il existe 3999 hypergroupes d'ordre 3 non isomorphes deux à deux.*

La classification ci-dessous permet de préciser ce résultat.

Classification des hypergroupes d'ordre 3

		Classes					
		Abéliens			non Abéliens		
		Cycliques	non Cycliques		Cycliques	non Cycliques	
			Proj.	non Proj.		Proj.	non Proj.
Ordre du groupe d'automorphismes	1	4	2	-	-	-	-
	2	3	-	-	6	1	-
	3	70	3	5	154	8	4
	6	360	2	17	3279	20	61

Remarque 3. *E.Azzali [1] avait effectué des calculs sur certains hypergroupes commutatifs d'ordre 3, cependant notre méthodologie est indépendante puisqu'elle étudie globalement les hypergroupes d'ordre 3 sans aucune limitation sur leur nature.*

6 Algorithme

6.1 Structure de données

Nous représentons un ensemble H tel que $|H| = n$ par $\mathcal{H} = \{2^i / i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$. Il est alors judicieux d'utiliser des opérateurs logiques comme outils de manipulation des ensembles. Par exemple si $A \subset H$ et $B \subset H$ alors $A \cup B \leftrightarrow \mathcal{A} + \mathcal{B}$ où $+$ est le *ou* logique et $A \cap B \leftrightarrow \mathcal{A}.\mathcal{B}$ où . est le *et* logique. Ensuite nous codons la table de Cayley en base $n! - 1$. Chacun des chiffres du nombre obtenu représente un élément de la table de Cayley.

6.2 Structure de l'algorithme

6.2.1 Génération des hypergroupes et partitionnement

Pour générer les candidats hypergroupes nous disposons d'un compteur en base $n! - 1$. Ce compteur énumère l'ensemble des nombres à n^2 chiffres. Nous élaguons au fur et à mesure de la génération des candidats en vérifiant de manière dynamique l'axiome de reproduction sur le produit de l'hyperopération. Si l'axiome de reproduction est vérifié, nous testons ensuite son associativité.

Si le candidat vérifie les deux propriétés, il s'agit d'un hypergroupe alors nous déterminons ses caractéristiques ainsi que l'ordre de son groupe d'automorphismes, et l'affectons à sa classe.

6.2.2 Test d'isomorphie

Définition 8. *Deux hypergroupes* $< H, . >$ *et* $< H, * >$ *sont isomorphes s'il existe* $f \in Aut(H, *)$ *tel que* $\forall (x, y) \in H^2 \; xy = f(x * y)$.

Il nous suffit donc de pré-calculer S_n et de vérifier pour chaque paire d'hypergroupes $(< H, . >, < H, * >)$ s'il existe $f \in S_n$ tel que $f(< H, * >) =< H, . >$.

Pour simplifier l'énumération des hypergroupes, nous n'effectuons donc les tests d'isomorphies qu'entre hypergroupes de même classe. Nous obtenons ainsi l'ensemble des hypergroupes non isomorphes deux à deux.

Les résultats obtenus sont conformes aux propositions et théorèmes énoncés.

Conclusion

Il est donc évident que dans le domaine de l'énumération des hypergroupes, l'exploitation de techniques venues de l'énumération de structures beaucoup plus simples comme les ensembles munis d'un ordre partiel ou les modèles mixtes [2, 3] permettra d'effectuer des progrès considérables comme nous avons pu le constater pour les hypergroupes d'ordre 3. En effet cette nouvelle approche qui se concentre entre autres sur le groupe d'automorphismes contient des éléments capables de transcender certaines difficultés combinatoires.

Références

[1] E. Azzali. Sull'ordinamento della classe delle strutture di ipergruppo su un insieme finito. In *Ipergruppi, altre strutture multivoche e loro applicazioni, Udine*, pages 137–145, 1885.

[2] R. Bayon, N. Lygeros, and J.-S. Sereni. Nouveaux progrès dans l'énumération des modèles mixtes. In *Knowledge discovery and discrete mathematics : JIM'2003*, pages 243–246, Université de Metz, France, 2003. INRIA.

[3] R. Bayon, N. Lygeros, and J.-S. Sereni. New progress in enumeration of mixed models. *Appl. Math. E-Notes*, 5 :60–65, 2005.

[4] G. Birkhoff. Sobre los grupos de automorfismos. *Revista Union Math. Arg*, 11 :155–157, 1946.

[5] C. Chaunier and N. Lygeros. The number of orders with thirteen elements. *Order*, 9(3) :203–204, 1992.

[6] C. Chaunier and N. Lygeros. Progrès dans l'énumération des posets. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 314(10) :691–694, 1992.

[7] C. Chaunier and N. Lygeros. Le nombre de posets à isomorphie près ayant 12 éléments. *Theoret. Comput. Sci.*, 123(1) :89–94, 1994. Number theory, combinatorics and applications to computer science (Marseille, 1991).

[8] C. Chaunier and N. Lygeros. Posets minimaux ayant un groupe d'automorphismes d'ordre premier. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 318(8) :695–698, 1994.

[9] P. Corsini. *Prolegomena of Hypergroup Theory.* Aviani Editore, 1993.

[10] P. Corsini and V. Leoreanu. *Applications of Hyperstructure Theory.* Kluwer Academic Publishers, 2003.

[11] M. De Salvo. Commutative finite a-hypergroups of length two. *Annals of Discrete Mathematics*, 37 :147–156, 1988.

[12] R. Fraïssé and N. Lygeros. Petits posets : dénombrement, représentabilité par cercles et "compenseurs". *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 313(7) :417–420, 1991.

[13] N. Lygeros. Remarques sur les hypergroupes, la commutativité et la cyclicité. *Perfection*, 7, 2004.

[14] N. Lygeros. Sur la notion de groupe d'automorphismes. *Perfection*, 8, 2004.

[15] N. Lygeros. Sur le calcul propositionnel, un paradigme d'univers clos. *Perfection*, 3, 2004.

[16] N. Lygeros. Sur le caractére global de l'axiome de reproduction. *Perfection*, 7, 2004.

[17] N. Lygeros and M. Mizony. Construction de posets dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à un groupe donné. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 322(3) :203–206, 1996.

[18] F. Marty. Sur une généralisation de la notion de groupe. In *8ème congrès des Mathématiciens Scandinaves, Stockholm*, pages 45–49, 1934.

[19] F. Marty. Rôle de la notion d'hypergroupe dans l'étude des groupes non abéliens. *C. R. Acad. Sci. Paris Math.*, 1935.

[20] F. Marty. Sur les groupes et hypergroupes attachés à une fraction rationnelle. *Annales scientifiques de l'E.N.S.*, 53 :83–123, 1936.

[21] M. Massot, P.V. Marchand, and N. Lygeros. Enumeration and 3d-representation of the stereo-isomers of paraffinic molecules. *Journal of Symbolic Computation.*

[22] H. J. Prömel. Counting unlabeled structures. *J. Comb. Theory*, 44 :83–83, 1987.

[23] Th. Vougiouklis. *Cyclicity of hypergroups.* PhD thesis, in greek, 1980.

[24] Th. Vougiouklis. Cyclicity in a special class of hypergroups. *Acta Univ Car.-Math et Ph*, 22(1) :3–6, 1981.

[25] Th. Vougiouklis. Generalization of P-hypergroups. *Circolo Mat. di Palermo*, 36 :114–121, 1987.

[26] Th. Vougiouklis. Isomorphisms on P-hypergroups and cyclicity. *Ars Combinatoria*, 29A :241–245, 1990.

[27] Th. Vougiouklis. *Hyperstructures and their Representations*. Hadronic Press, 1994.

[28] Th. Vougiouklis and S. Spartalis. P-cyclic hypergroups with three characteristic elements. *Annals of discrete Mathematics*, 37 :421–426, 1988.

[29] H.S. Wall. Hypergroups. *American Journal of Mathematics*, 59 :78–98, 1937.