Catégories spécifiques d'hypergroupes d'ordre 3

R. BAYON, N. LYGEROS

mars 2005

dédié à Jean Mittas

Résumé

Dans cet article, nous énumérons et étudions systématiquement des catégories spécifiques des hypergroupes de F. Marty d'ordre 3 : les hypergroupes canoniques et les hypergroupes renaissants de J. Mittas et les hypergroupes très fins de Th. Vougiouklis. Cette étude est complétée par l'introduction, la caractérisation et la classification des hypergroupes hypocomplets ainsi que par l'explicitation du poset des hypergroupes d'ordre 2.

Abstract

In this article we systematically enumerate and study specific categories of Marty's hypergroups of order 3 : Mittas's canonical hypergroups and renaissant hypergroups and Vougiouklis's very-thin hypergroups. This study is completed with the introduction characterisation and classification of hypocomplete hypergroups and the explication of the posets of the hypergroups of order 2.

Mots-clefs

canonique, diagramme de Hasse, énumération, groupe d'automorphismes, hypergroupe, hyperproduit, hypocomplet, renaissant, poset, table de Cayley, très fin

Classification A.M.S. – 20N20 – 06A11

Introduction

F. Marty a introduit en 1934 la notion d'hypergroupe [20, 21, 22]. $(H, .)$ est un hypergroupe si $(.) : H \times H \to p(H)$ est une hyperopération associative pour laquelle l'axiome de reproduction hH=Hh=H est valide pour tout h de H. Par la suite Th. Vougiouklis a défini les H_v-groupes généralisant les hypergroupes et pour lesquels l'associativité est affaiblie [14].

Les premiers résultats de nos travaux ont été présentés au Congrès National d'Algèbre et de Théorie des Nombres à Ioannina en 2004 ainsi que dans une note [1]. En effet, après nous être intéressés à l'énumération des hypergroupes d'ordre 3 [5], nous construisons maintenant explicitement le poset des hypergroupes d'ordre 2. Puis nous présentons des résultats sur les hypergroupes canoniques et les hypergroupes renaissants d'ordre 3, qui sont des hypergroupes spécifiques introduit par J. Mittas respectivement en 1969 et 1984. Nous étudions aussi les hypergroupes très fins définis par Th. Vougiouklis [31]. Nous les exploitons afin d'étudier le poset de l'ensemble des hypergroupes d'ordre n. Ce poset est muni d'une relation d'ordre partiel initialement définie par Th. Vougiouklis [32]. Enfin nous introduisons les hypergroupes hypocomplets, les caractérisons et les classifions.

1 Le poset des hypergroupes d'ordre 2

Définition 1. *Un poset (partially ordered set) $P = (P, \leq)$ est un ensemble P muni d'un ordre partiel $\leq$.*

R. Fraïssé et N. Lygeros ainsi que C. Chaunier et N. Lygeros se sont attachés à l'énumération des posets [12, 8, 9, 10]. Puis C. Chaunier et N. Lygeros ainsi que N. Lygeros et M. Mizony les ont reliés à la notion de groupe d'automorphismes [11, 19]. Ces travaux ont été repris pour l'énumération des modèles mixtes [6, 7].
A l'instar des hypergroupes qui permettent d'étudier la structure des schémas mentaux que nous utilisons dans la théorie des groupes et qui permettent d'établir la liste de ceux qui supportent cette généralisation, les H_v-groupes permettent de mettre en évidence via une propriété qui est fausse pour les hypergroupes, la structure du poset générée par cette propriété lorsque nous effectuons la restriction des H_v-groupes aux hypergroupes.

En effet nous pouvons considérer le poset des H_v-groupes puisqu'il existe une propriété qui s'appuie sur la faible associativité de ceux-ci. Examinons cette propriété. Pour cela considérons deux H_v-groupes $(H, .)$ et $(H, *)$ définis sur le même ensemble. Alors l'hyperopération (.) est appelée inférieure ou égale à $(*)$ si et seulement s'il existe $f \in Aut(H, *)$ telle que $xy \subset f(x * y)$ pour tous les couples (x, y) dans H. Une conséquence basique de cette définition c'est que toute opération plus grande que celle d'un H_v-groupe définit un H_v-groupe.

Aussi nous avons une construction naturelle du poset des H_v-groupes. Et comme les hypergroupes au sens de F. Marty sont inclus dans les H_v-groupes nous pouvons considérer le sous-poset du poset initial même si la propriété n'est pas héréditaire dans ce cas. Pour les hypergroupes d'ordre 2 nous avons le poset suivant :

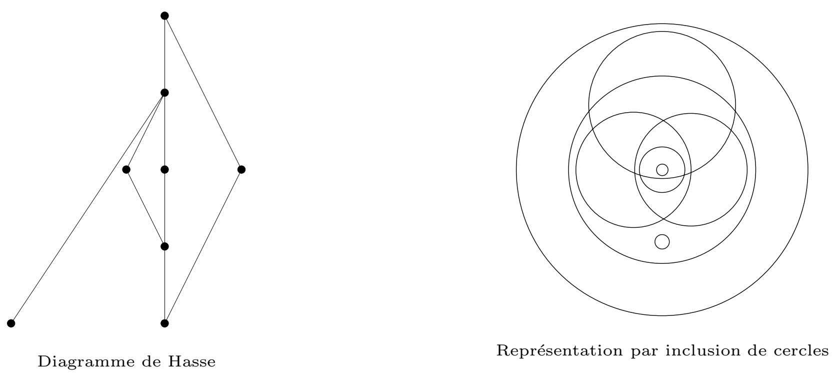

FIG. 1 – Poset des hypergroupes d'ordre 2

En termes de poset sa longueur est maximale puisque les 4 H de l'hypergroupe complet sont tous décomposés jusqu'à atteindre l'hypergroupe isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}_2$. Il est donc de même longueur que le poset des H_v-groupes. Cela provient entre autres du fait que l'hypergroupe complet est maximal et le groupe minimal pour les deux posets.

Par ailleurs, le diagramme de Hasse du poset des hypergroupes met en évidence la différence fondamentale qui existe entre la cyclicité et la projectivité puisque l'hypergroupe projectif en tant qu'atome incomparable au groupe cyclique n'appartient pas à la chaîne maximale. Quant à la non commutativité, elle est bien visible puisque les deux hypergroupes non commutatifs sont situés symétriquement sur la chaîne maximale [17], au même niveau pour l'ensemble du poset ce qui explique l'ordre de son groupe d'automorphismes. Ainsi nous voyons que le poset des hypergroupes au sens de F. Marty via le poset des H_v-groupes, permet de visualiser des propriétés qui caractérisent les hypergroupes sans nécessairement passer par la nature intrinsèque de ceux-ci. Le poset en tant que structure combinatoire simple conserve via son squelette une information sur les relations entre hypergroupes et non seulement les hypergroupes.

2 Catégories spécifiques d'hypergroupes d'ordre 3

2.1 Hypergroupes canoniques

L'introduction des hypergroupes canoniques par J. Mittas [28, 29] ne s'est pas effectuée de manière linéaire. En effet elle a été précédée des notions d'hypercorps et d'hypercorps valué créées en 1956 par M. Krasner. Ce dernier a aussi élaboré la notion d'hyperanneau en 1966. Le point de vue de J. Mittas fut autre [2]. Connaissant l'existence de la notion d'hypergroupe au sens de F. Marty, il a réalisé que la restriction à la structure additive de la notion d'hypercorps ou d'hyperanneau se ramenait à considérer une classe spéciale d'hypergroupes et c'est cette classe qu'il a dénommée hypergroupes canoniques et qu'il a notée additivement. Ces derniers peuvent désormais être définis de la manière suivante selon une axiomatique classique :

Définition 2 (J. Mittas [25, 26, 27]). *Un hypergroupe est canonique s'il vérifie les cinq axiomes suivants :*

(i) Associativité : $x(yz) = (xy)z$

(ii) Commutativité : $xy = yx$

(iii) Neutralité : Il existe $1 \in H$ *tel que, pour tout* $x \in H$*, nous avons* $x.1 = x$ *(un tel élément est évidemment unique et nous l'appelons neutre de* H*)*

(iv) Opposition : Pour tout $x \in H$*, il existe un et un seul* $x' \in H$ *tel que,* $1 \in xx'$ *(un tel* x' *sera noté aussi* x^{-1} *et dit l'inverse de* x *et nous poserons* $x/y = xy^{-1}$*)*

(v) Réciprocité : $z \in xy \Rightarrow y \in z/x$.

De ces axiomes, J. Mittas a pu montrer de manière élémentaire que les ensembles de sous-hypergroupes de H qui sont inversibles, clos, canoniques et contenant le neutre de H coïncident. Cela permet aussi de montrer que si R est une relation d'équivalence normale dans H, l'ensemble des classes H/R est un hypergroupe canonique.

$H_1 = (\{a\}, \{b\}, \{b\}, \{a\})$	$H_2 = (\{a\}, \{b\}, \{b\}, H)$
$H_3 = (\{a\}, \{b\}, H, H)$	$H_4 = (\{a\}, H, \{b\}, H)$
$H_5 = (\{a\}, H, H, \{b\})$	$H_6 = (\{a\}, H, H, H)$
$H_7 = (\{b\}, H, H, H)$	$H_8 = (H, H, H, H)$

Liste des hypergroupes d'ordre 2

En exploitant cette caractérisation de J. Mittas et la classification de Th. Vougiouklis des hypergroupes d'ordre 2, nous en déduisons que les hypergroupes H_3 et H_4 ne sont pas canoniques car ils ne sont pas commutatifs. Idem pour les hypergroupes H_5, H_6, H_7 et H_8 car ils n'ont pas d'élément neutre. Et avec les axiomes d'opposition et de réciprocité nous pouvons vérifier que H_1 et H_2 sont canoniques. Ainsi les hypergroupes canoniques à l'ordre 2, sont le groupe cyclique et l'hypergroupe H_2. Pour retrouver directement ce résultat sans faire appel à la classification, nous considérons la table de Cayley en imposant les contraintes de commutativité et de neutralité et nous n'avons à déterminer que le carré b^2 qui doit nécessairement être différent de b pour respecter les axiomes d'opposition et de réciprocité [2].

En exploitant la caractérisation de J. Mittas et la classification de R. Bayon - N. Lygeros des hypergroupes à l'ordre 3, nous obtenons 37 hypergroupes avec élément neutre dont 28 sont abéliens.

Parmi ces 28 hypergroupes abéliens avec élément neutre, nous trouvons 10 candidats qui vérifient les axiomes d'opposition et de réciprocité.

Théorème 1. *Il existe, à isomorphie près, 10 hypergroupes canoniques à l'ordre 3.*

$H_i\ 1 \leq i \leq 10$	$\vert Aut(H_i)\vert$
$(\{a\},\{b\},\{c\},\{b\},\{c\},\{a\},\{c\},\{a\},\{b\})$	3
$(\{a\},\{b\},\{c\},\{b\},\{ac\},\{b\},\{c\},\{b\},\{a\})$	6
$(\{a\},\{b\},\{c\},\{b\},\{ab\},\{c\},\{c\},\{c\},\{ab\})$	6
$(\{a\},\{b\},\{c\},\{b\},\{ac\},\{bc\},\{c\},\{bc\},\{ab\})$	3
$(\{a\},\{b\},\{c\},\{b\},H,\{b\},\{c\},\{b\},\{a\})$	6
$(\{a\},\{b\},\{c\},\{b\},H,\{b\},\{c\},\{b\},\{ac\})$	6
$(\{a\},\{b\},\{c\},\{b\},H,\{bc\},\{c\},\{bc\},\{ab\})$	6
$(\{a\},\{b\},\{c\},\{b\},\{b\},H,\{c\},H,\{c\})$	3
$(\{a\},\{b\},\{c\},\{b\},\{bc\},H,\{c\},H,\{bc\})$	3
$(\{a\},\{b\},\{c\},\{b\},H,\{bc\},\{c\},\{bc\},H)$	3

Liste des hypergroupes canoniques d'ordre 3

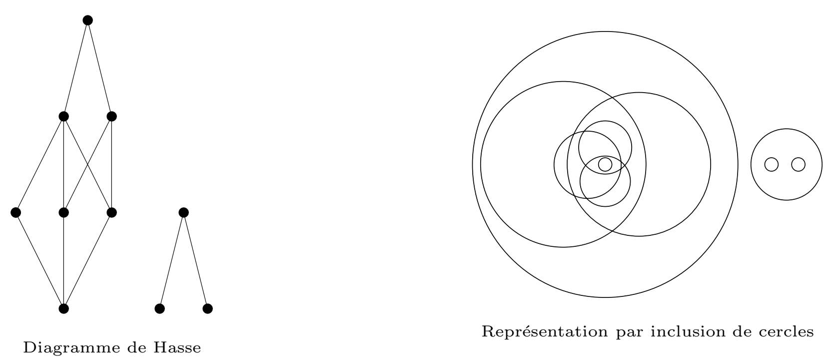

FIG. 2 – Poset des hypergroupes canoniques d'ordre 3

2.2 Hypergroupes renaissants

Définition 3 (J. Mittas [24, 23, 30]). *Nous disons qu'une hyperopération $x.y$ définie sur un ensemble H, que nous supposons encore associative, vérifie la propriété de la renaissance si pour tout $x \in H$, il existe un n tel que $x^n = H$.*

Définition 4. *$(H, .)$ est un demi-hypergroupe si $(.) : H \times H \to p(H)$ est une hyperopération associative.*

Proposition 1 (J. Mittas). *Dans tout demi-hypergroupe la propriété de la renaissance entraîne la reproductivité et, par conséquent, le demi-hypergroupe est un hypergroupe, appelé hypergroupe renaissant.*

C'est ainsi que J. Mittas a introduit pour la première fois en 1984, la notion d'hypergroupes renaissants qui constituent une catégorie spécifique des hypergroupes single-power. Il a aussi défini la hauteur et le gradient de la manière suivante : le plus petit $n = h \in \mathbb{N}$ pour lequel nous avons $a^n = H$ est dit hauteur du sous-ensemble non vide A de H et nous la notons $[A]$. Si $A = \{x\}$, h est appelé hauteur de l'élément x et nous posons $[x] = h$. Si $A = \emptyset$ nous posons par définition $[\emptyset] = +\infty$.
Le plus petit entier naturel $g > 1$ tel que $A \subset A^g$ est dit grade du sous-ensemble $A \neq \emptyset$ et de H et nous le notons $g = (A)$. Si $A = \{x\}$, g est appelé grade de x et l'expression $A \subset A^g$ équivaut évidemment à $x \in x^g$. Si $A = \emptyset$ ou H, nous posons par définition $(A) = 1$.

De ce formalisme, J. Mittas a déduit le théorème de caractérisation des hypergroupes renaissants.

Théorème 2 (J. Mittas [30]). *Pour qu'un hypergroupe $(H, .)$ soit renaissant il faut et il suffit que :*
(i) H n'inclue pas de parties stables.
(ii) Toute chaîne de la forme $A \subset A^2 \subset A^3 \dots$ extraite de H soit de longueur finie.

En exploitant cette caractérisation de J. Mittas et la classification de Th. Vougiouklis des hypergroupes d'ordre 2 nous en déduisons que les hypergroupes H_1 à H_6 ne sont pas renaissants car ils ont un élément projectif et donc une partie stable. Les hypergroupes H_7 et H_8 sont renaissants car pour le premier comme $b^2 = H$ nous avons $a^4 = b^2 = H$ et pour le second $a^2 = b^2 = H$. Nous pouvons retrouver directement ce résultat sans faire appel à la classification [15]. En effet, en excluant la projectivité, nous avons $a^2 = \{b\}$ ou H et $b^2 =$

$\{a\}$ ou H i.e. 4 configurations possibles. La configuration scalaire engendre une stabilité à l'ordre 4 ; elle est donc exclue. Les configurations croisées se ramènent à l'hypergroupe $(\{b\}, H, H, H)$ ou $(H, H, H, \{a\})$. Et la configuration complète s'identifie à l'hypergroupe complet (H, H, H, H). En exploitant la caractérisation de J. Mittas et la classification de R. Bayon - N. Lygeros des hypergroupes d'ordre 3 via le partitionnement des groupes d'automorphismes nous avons le résultat suivant :

Théorème 3. *Il existe, à isomorphie près, 2827 hypergroupes renaissants à l'ordre 3.*

Plus explicitement nous présentons, dans le tableau suivant, le nombre d'hypergroupes renaissants classés suivant l'ordre de leur groupe d'automorphismes.

$\|Aut(H)\|$	1	4
	2	9
	3	131
	6	2683

Hypergroupes renaissants d'ordre 3 suivant leur groupe d'automorphismes

Nous présentons aussi ici le nombre d'hypergroupes ayant un nombre donné d'éléments single-power.

Définition 5. *Un élément x d'hypergroupe $(H, .)$ est dit single-power s'il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que $x^h = H$.*

Un hypergroupe renaissant est un hypergroupe ayant tous ses éléments single-power.

		0	1	2
$\|Aut(H)\|$	1	2	-	-
	2	1	-	-
	3	24	31	58
	6	106	405	545

Hypergroupes et éléments single-power suivant leur groupe d'automorphismes

2.3 Hypergroupes très fins

Dans le cadre de la généralisation des hypergroupes au sens de F. Marty, Th. Vougiouklis a introduit la notion d'hyperstructure qu'il a nommée H_v-structure et qui constitue la généralisation des hyperstructures algébriques comme les hypergroupes et les hyperanneaux. Un cas particulier de cette généralisation, c'est celui d'hyperstructure très fine. Plus explicitement une H_v-structure s'appelle très fine si toutes ses hyperopérations sont uniformes, sauf une et une seule ; dont aussi tous les produits sont des singletons, sauf un seul produit, qui est un sous-ensemble non vide. Avec L. Konguetsof et S. Spartalis, Th. Vougiouklis [13] a établi la proposition suivante.

Proposition 2 (L. Konguetsof, Th. Vougiouklis, S. Spartalis [13]). *Soit $(H, .)$ un H_v-groupe fini très fin d'ordre $n > 1$. Soient a et b les seuls éléments de H tels que $ab = A$ soit d'ordre strictement supérieur à 1.*

(i) ou bien pour tout v de $H - \{a\}$; $va = a$ et deux cas sont à considérer : si $n = 2$, alors il existe une loi de groupe $(*)$ sur H, telle que $a * b \in A$ et $x * y = xy$ pour tous x, y de $H - \{(a, b)\}$,
si $n \geq 3$, alors $a = b$, $H - \{a\}$ est un groupe, $A = H$ ou $A = H - \{A\}$,

(ii) ou bien il existe v de H tel que $v \neq a$ et $va \neq a$, alors il existe une loi de groupe $(*)$ presque associative sur H i.e. l'associativité se vérifie partout, sauf éventuellement pour les triplets d'éléments où se présente le produit $a * b$, telle que $a * b \in A$ et $x * y = xy$ pour tous x, y de $H - \{(a, b)\}$.

Ainsi si nous désirons caractériser les hypergroupes très fins il suffit de considérer la première partie de la proposition.

A présent, si nous considérons le poset des H_v-groupes et sa restriction, le poset des hypergroupes, nous pouvons examiner la maximalité de la plus longue chaîne de chacun d'entre eux. Une chaîne ayant la propriété de maximalité est de longueur $1 + (n - 1)n^2$. Pour $n = 2$, nous avons établi que les chaînes maximales ont même longueur puisque la chaîne maximale du poset des hypergroupes qui est inclus dans le poset des H_v-groupes est maximale i.e. de longueur $1.2^2 + 1$. En d'autres termes, elle débute avec le groupe cyclique et aboutit à l'hypergroupe complet.

Ensuite nous remarquons que si la chaîne maximale du poset des hypergroupes a la propriété de maximalité alors elle doit traverser les hypergroupes très fins.

Pour $n = 3$, avec la caractérisation L. Konguetsof - S. Spartalis - Th. Vougiouklis, nous obtenons deux hypergroupes très fins : $HF_1 = (\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b\}, \{ac\}, \{b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\})$ et $HF_2 = (\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b\}, H, \{b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\})$ et nous remarquons que l'hyperopération de HF_1 est incluse dans l'hyperopération de HF_2. De plus par la classification de R. Bayon - N. Lygeros des hypergroupes d'ordre 3 nous n'avons que 7 hypergroupes minimaux absolus dont HF_1. Et comme HF_2 a un produit à 3 termes, nous en déduisons que la chaîne maximale n'a pas la propriété de maximalité.

Pour $n \geq 4$, via la caractérisation, nous avons que $A = H$ donc $|A| \geq 4$ ou $A = H - \{a\}$ donc $|A| \geq 3$. Dans tous les cas A n'est pas d'ordre 2. Par conséquent, nous n'avons pas la propriété de maximalité. Nous avons donc le théorème suivant [4] :

Théorème 4. *Pour $n \geq 3$, la chaîne maximale du poset des hypergroupes n'a pas la propriété de maximalité.*

3 Les hypergroupes hypocomplets

3.1 Hyperproduits complets

Définition 6. *Un hyperproduit xy d'un hypergroupe $(H, .)$ est dit complet si $xy = H$.*

Une manière puissante d'aborder les groupes au sens de F. Marty (associativité forte) ou au sens de Th. Vougiouklis (associativité faible) qui sont des généralisations successives de la notion de groupe, c'est de les examiner via leur groupe d'automorphismes [16, 3]. Cette dernière notion dont le caractère classifiant est fort permet de les distinguer de manière intrinsèque. De plus en croisant l'information obtenue avec la nature de l'hypergroupe, nous parvenons à une partition très fine de ces derniers. Ainsi pour les hypergroupes d'ordre 2, d'après la classification de Th. Vougiouklis nous avons 2 hypergroupes dont le groupe d'automorphismes est d'ordre 1 et 4 hypergroupes dont le groupe d'automorphismes est d'ordre 2. Nous voyons ainsi que même dans le cas le plus simple, la notion de groupes d'automorphismes permet de faire une distinction. De même pour les hypergroupes d'ordre 3, d'après la classification de R. Bayon - N. Lygeros nous avons respectivement 6, 10, 244 et 3739 hypergroupes dont le groupe d'automorphismes est d'ordre 1, 2, 3 et 6 respectivement. Cependant la notion de groupe d'automorphismes peut aussi servir à partitionner les hypergroupes dans un cadre totalement différent qui est celui de l'énumération en fonction du nombre d'occurrences de la totalité de l'hypergroupe dans les hyperproduits. Pour les hypergroupes d'ordre 2 nous avons les résultats suivants :

		0	1	2	3	4
$\lvert Aut(H)\rvert$	1	-	-	1	-	1
	2	1	1	2	2	-
Total		1	1	3	2	1

Hyperproduits complets à l'ordre 2 suivant leur groupe d'automorphismes

Et pour les hypergroupes d'ordre 3 nous avons les résultats suivants :

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lvert Aut(H)\rvert$	1	2	-	-	1	-	-	2	-	-	1
	2	1	-	-	5	-	-	4	-	-	-
	3	12	11	46	36	61	41	22	13	2	-
	6	12	58	317	819	1143	921	386	77	6	-
Total		27	69	363	861	1204	962	414	90	8	1

Hyperproduits complets à l'ordre 3 suivant leur groupe d'automorphismes

De cette manière nous pouvons remarquer que la fonction qui représente le nombre d'hypergroupes selon le nombre de H dans les hyperproduits est unimodale (au moins jusqu'à cet ordre) mais que ce n'est pas le cas si nous nous restreignons aux hypergroupes dont le groupe d'automorphismes est d'ordre 3. Ainsi dans la masse exponentielle des hypergroupes, la notion de groupe d'automorphismes permet de faire des distinctions et de déterminer certaines propriétés comme la rigidité, la divisibilité ou encore le caractère abélien alors que ces informations seraient inaccessibles sans cette intervention. C'est pour cette raison que nous considérons que les groupes revivent dans les hypergroupes à travers leur groupe d'automorphismes. Même généralisé, le groupe continue à jouer un rôle fondamental.

3.2 Enumération d'hypergroupes hypocomplets

Définition 7 ([18]). *Un hypergroupe est dit hypocomplet lorsque toutes ses hyperopérations à l'exception d'une seule, sont complètes.*

Proposition 3. *La structure définie par* $aa = S \neq H$ *et* $\forall (x, y) \in H^2 \neq (a, a)\; xy = H$ *est un hypergroupe hypocomplet abélien.*

Démonstration.
- La structure est abélienne par définition puisque l'unique produit différent des autres est un carré.
- La structure vérifie l'axiome de reproduction puisqu'il existe toujours un H dans chaque colonne et dans chaque ligne de sa table.
- La structure est associative car :
  $a(aa) = S = (aa)a$
  $x(yz) = xH = H = Hz = (xy)z$ pour $x, y, z \neq a$
  $a(yz) = aH = H = Hz = (ay)z$ pour $y, z \neq a$
  $x(ya) = xH = H = Ha = (xy)a$ pour $x, y \neq a$.
- La structure est un hypergroupe et elle est donc hypocomplète.

□

Théorème 5. *Le nombre d'hypergroupes hypocomplets abéliens* H *est égal à* $2(n-1)$ *à isomorphie près pour* $|H| = n$.

Démonstration. Soit $(H, .)$ un hypergroupe hypocomplet tel que $|H| = n$. Sans perte de généralité nous supposons que aa est le seul hyperpoduit non complet. Soit $aa = S$ et $aa = R$ (engendrant les hypergroupes H_S et H_R). Nous avons $1 \leq S \leq n-1$ et $1 \leq R \leq n-1$.
Si $|S| \neq |R|$ alors $H_R \ncong H_S$.
Si $|S| = |R|$, il existe 2 classes d'equivalence, en effet :

- si $a \in S$ et $a \in R$ alors $H_R \cong H_S$,

- si $a \in S$ et $a \notin R$ alors $H_R \ncong H_S$, ce qui est isomorphe à $a \notin S$ et $a \in R$,

– si $a \notin S$ et $a \notin R$ alors $H_R \cong H_S$.

Par conséquent il existe $2(n-1)$ hypergroupes hypocomplets abéliens. $\square$

Proposition 4. *: La structure définie par $ab = S \neq H$ et $S \neq \{a\}$ ou $S \neq \{b\}$, et $\forall (x, y) \in H^2 \neq (a, b)$ $xy = H$ est un hypergroupe hypocomplet non abélien.*

Démonstration. – La structure est non abélienne par définition puisque $ab = S \neq H = ba$
- La structure vérifie l'axiome de reproduction pour la même raison que la proposition précédente.
- La structure est associative car
  $a(aa) = H = (aa)a$, $b(bb) = H = (bb)b$
  $x(yz) = xH = H = Hz = (xy)z$ pour $x, y, z \neq a, b$; pour un seul a ou b dans x, y, z voir proposition précédente.
  $a(bz) = aH = H = sz = (ab)z$ idem pour les permutés $a(yb) = aH = H = Hb = (ay)b$ idem pour les permutés $a(ba) = aH = H = Sa = (ab)a$
  $a(ab) = aS = H = Hb = (aa)b$

$\square$

Remarque 1. *Si $ab = a$ la structure n'est pas associative car $(ab)b = ab = a \neq H = aH = a(bb)$.*
Si $(aa)b = Hb = H \neq b = ab = a(ab)$ la structure n'est pas associative car $(aa)b = Hb = H \neq b = ab = a(ab)$.

Théorème 6. *Le nombre d'hypergroupes hypocomplets non abéliens est égal à $4(n-2)$ à isomorphie près pour $|H| = n$.*

La démonstration est analogue à celle du théorème 5.

Théorème 7. *Le nombre d'hypergroupes hypocomplets est égal à $6n - 10$ à isomorphie près pour $|H| = n$.*

Ce théorème est la combinaison des théorèmes 5 et 6.

4 Algorithme

4.1 Structure de données

Nous représentons un ensemble H tel que $|H| = n$ par $\mathcal{H} = \{2^i/i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$. Il est alors judicieux d'utiliser des opérateurs logiques comme outils de manipulation des ensembles. Par exemple si $A \subset H$ et $B \subset H$ alors $A \cup B \leftrightarrow \mathcal{A} + \mathcal{B}$ où $+$ est le *ou* logique et $A \cap B \leftrightarrow \mathcal{A}.\mathcal{B}$ où . est le *et* logique. Ensuite nous codons la table de Cayley en base $n! - 1$. Chacun des chiffres du nombre obtenu représente un élément de la table de Cayley.

4.2 Structure de l'algorithme

4.2.1 Génération des hypergroupes et partitionnement

Pour générer les candidats hypergroupes nous disposons d'un compteur en base $n! - 1$. Ce compteur énumère l'ensemble des nombres à n^2 chiffres. Nous élaguons au fur et à mesure de la génération des candidats en vérifiant de manière dynamique l'axiome de reproduction sur le produit de l'hyperopération. Si l'axiome de reproduction est vérifié, nous testons ensuite son associativité.

Si le candidat vérifie les deux propriétés, il s'agit d'un hypergroupe alors nous déterminons la partition à laquelle il appartient. Nous partitionnons alors les hypergroupes suivant le nombre d'hyperproduits xy d'ordre donné. Nous obtenons ainsi un partitionnement plus fin et plus uniforme de l'ensemble des hypergroupes. Nous pouvons aussi avec ce partionnement construire rapidement le poset des hypergroupes.

4.2.2 Test d'isomorphie

Définition 8. *Deux hypergroupes* $(H, .)$ *et* $(H, *)$ *sont isomorphes s'il existe* $f \in Aut(H, *)$ *tel que* $\forall (x, y) \in H^2$ $xy = f(x * y)$.

Il nous suffit donc de pré-calculer S_n et de vérifier pour chaque paire d'hypergroupes
$((H, .), (H, *))$ s'il existe $f \in S_n$ tel que $f((H, *)) = (H, .)$.

Pour simplifier l'énumération des hypergroupes, nous n'effectuons donc les tests d'isomorphie qu'entre hypergroupes de même partition. Nous obtenons ainsi l'ensemble des hypergroupes non isomorphes deux à deux, ainsi que l'ordre de leur groupe d'automorphismes.

Remerciements

Nous tenons à remercier le groupe spécial de recherche qui nous a notamment permis de vérifier les calculs, et plus particulièrement Patrice Deloche pour son aide constante.

Références

[1] R. Bayon and N. Lygeros. Les hypergroupes et H_v-groupes d'ordre 3. *soumis à Bulletin of the Greek Mathematical Society.*

[2] R. Bayon and N. Lygeros. Remarques sur les hypergroupes canoniques au sens de Mittas. *Perfection*, 5-10, 2004.

[3] R. Bayon and N. Lygeros. Hypergroupes et groupes d'automorphismes. *Perfection*, 6-1, 2005.

[4] R. Bayon and N. Lygeros. Remarques sur les hypergroupes très fins. *Perfection*, 6-1, 2005.

[5] R. Bayon and N. Lygeros. Les hypergroupes d'ordre 3. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, à paraître en 2005.

[6] R. Bayon, N. Lygeros, and J.-S. Sereni. Nouveaux progrès dans l'énumération des modèles mixtes. In *Knowledge discovery and discrete mathematics : JIM'2003*, pages 243–246, Université de Metz, France, 2003. INRIA.

[7] R. Bayon, N. Lygeros, and J.-S. Sereni. New progress in enumeration of mixed models. *Appl. Math. E-Notes*, 5 :60–65, 2005.

[8] C. Chaunier and N. Lygeros. The number of orders with thirteen elements. *Order*, 9(3) :203–204, 1992.

[9] C. Chaunier and N. Lygeros. Progrès dans l'énumération des posets. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 314(10) :691–694, 1992.

[10] C. Chaunier and N. Lygeros. Le nombre de posets à isomorphie près ayant 12 éléments. *Theoret. Comput. Sci.*, 123(1) :89–94, 1994. Number theory, combinatorics and applications to computer science (Marseille, 1991).

[11] C. Chaunier and N. Lygeros. Posets minimaux ayant un groupe d'automorphismes d'ordre premier. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 318(8) :695–698, 1994.

[12] R. Fraïssé and N. Lygeros. Petits posets : dénombrement, représentabilité par cercles et "compenseurs". *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 313(7) :417–420, 1991.

[13] L. Konguetsof, Th. Vougiouklis, and S. Spartalis. Sur les hyperstructures très fines. *Rendiconti di Matematica*, 13(VII) :297–304, 1993.

[14] N. Lygeros. Remarques sur les groupes, les hypergroupes et les hyperstructures. *Perfection*, 5-8, 2004.

[15] N. Lygeros. Remarques sur les hypergroupes renaissants au sens de Mittas. *Perfection*, 5-10, 2004.

[16] N. Lygeros. Sur la notion de groupe d'automorphismes. *Perfection*, 5-8, 2004.

[17] N. Lygeros. Sur le poset des hypergroupes d'ordre 2. *Perfection*, 5-10, 2004.

[18] N. Lygeros. Sur le nombre d'hypergroupes hypocomplets. *Perfection*, 6-2, 2005.

[19] N. Lygeros and M. Mizony. Construction de posets dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à un groupe donné. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 322(3) :203–206, 1996.

[20] F. Marty. Sur une généralisation de la notion de groupe. In *8ème congrès des Mathématiciens Scandinaves, Stockholm*, pages 45–49, 1934.

[21] F. Marty. Rôle de la notion d'hypergroupe dans l'étude des groupes non abéliens. *C. R. Acad. Sci. Paris Math.*, 1935.

[22] F. Marty. Sur les groupes et hypergroupes attachés à une fraction rationnelle. *Annales scientifiques de l'E.N.S.*, 53 :83–123, 1936.

[23] J. Mittas. Hyperanneaux et certaines de leurs propriétés. *CRAS*, 269 :623–626, 1969.

[24] J. Mittas. Sur une classe d'hypergroupes commutatifs. *CRAS*, 269 :485–488, 1969.

[25] J. Mittas. Hypergroupes canoniques hypervalués. *CRAS*, 271 :4–7, 1970.

[26] J. Mittas. Les hypervaluations strictes des hypergroupes canoniques. *CRAS*, 271 :69–72, 1970.

[27] J. Mittas. Hypergroupes canoniques valués et hypervalués. *Mathematica Balkanica*, 1 :181–185, 1971.

[28] J. Mittas. Hypergroupes canoniques. *Mathematica Balkanica*, 2 :165–179, 1972.

[29] J. Mittas. Hypergroupes canoniques valués et hypervalués - hypergroupes fortement et superieurement canoniques. *Bulletin of the Greek Mathematical Society*, 23 :55–88, 1982.

[30] J. Mittas. Hypergroupes renaissants. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, pages 319–328, 1984.

[31] Th. Vougiouklis. The very thin hypergroups and the s-construction. In *Proc. of the Internat. Conf. on Incidence Geometries and Combinatorial Structures*, volume 2, pages 471–477, 1988.

[32] Th. Vougiouklis. A new class of hyperstructures. *Journal of combinatorics, information & system sciences*, 20 :229–235, 1995.