Les hypergroupes abéliens d'ordre 4

R. BAYON, N. LYGEROS

mars 2005

Résumé

Dans cette note, nous énumérons les hypergroupes abéliens d'ordre 4 qui représentent 10.614.362 entités à isomorphie près. Nous donnons aussi le nombre d'hypergroupes abéliens avec élement neutre, ainsi que le nombre d'hypergroupes canoniques.

Abstract

In this note, we enumerate the abelian hypergroups of order 4 wich represent 10.614.362 two by two non-isomorphic entities. We although give the number of abelian hypergroups with scalar unit, as well as the number of canonical hypergroups.

Mots-clefs

abélien, canonique, énumération, groupe d'automorphismes, hypergroupe

Classification A.M.S. – 20N20

1 Définitions

Définition 1.1 (F. Marty [10, 11, 12]) $< H, . >$ *est un hypergroupe si* (.) : $H \times H \to p(H)$ *est une hyperopération associative pour laquelle l'axiome de reproduction* $hH{=}Hh{=}H$ *est valide pour tout* h *de* H.

J. Mittas a introduit les hypergroupes canoniques [13, 14, 15]. Il a obtenu cette catégorie d'hypergroupes par restriction à la structure additive des hypercorps et hyperanneaux de M. Krasner [8].

Définition 1.2 (J. Mittas) *Un hypergroupe est canonique s'il vérifie les cinq axiomes suivants :*

(i) Associativité : $x(yz) = (xy)z$
(ii) Commutativité : $xy = yx$
(iii) Neutralité : Il existe $1 \in H$ *tel que, pour tout* $x \in H$*, nous avons* $x.1 = x$ *(un tel élément est évidemment unique et nous l'appelons neutre de* H*)*
(iv) Opposition : Pour tout $x \in H$*, il existe un et un seul* $x' \in H$ *tel que,* $1 \in xx'$ *(un tel* x' *sera noté aussi* x^{-1} *et dit l'inverse de* x *et nous poserons* $x/y = xy^{-1}$*)*
(v) Réciprocité : $z \in xy \Rightarrow y \in z/x$.

Définition 1.3 (H.S. Wall [17]) *Un hypergroupe* $< H, . >$ *est cyclique de période finie par rapport à un élément* h *de* H *s'il existe un entier* v *tel que* $H = h^1 \cup h^2 \cup \ldots \cup h^v$.

Définition 1.4 ([6]) *Un élément* x *de* $< H, . >$ *est projectif si et seulement si* $xx = x$. $< H, . >$ *est dit projectif si tous ses éléments sont projectifs.*

E.Azzali [2, 1] a effectué des calculs sur certains hypergroupes commutatifs d'ordre 3.

Suite à nos précédents travaux sur l'énumération des hypergroupes [9, 3, 6, 7, 5], nous donnons maintenant le nombre d'hypergroupes abéliens d'ordre 4, qui représentent, à isomorphie près, 10.614.362 entités. Nous précisons aussi le nombre d'hypergroupes canoniques d'ordre 4 [4, 7].

2 Les hypergroupes abéliens d'ordre 4

Th. Vougiouklis a énuméré les hypergroupes d'ordre 2 [16]. Il existe, à isomorphie près, 6 hypergroupes abéliens d'ordre 2. D'après notre classification des hypergroupes d'ordre 3 [6], nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Il existe, à isomorphie près,* 466 *hypergroupes abéliens d'ordre 3.*

Il existe à l'ordre 4, 15^{10} hyperopérations abéliennes potentielles.

Théorème 2.2 *Il existe, à isomorphie près,* 10.614.362 *hypergroupes abéliens d'ordre 4.*

La classification ci-dessous (cf. tableau 1) permet de préciser notre résultat.

		Classes		
		Cycliques	non Cycliques	
			Proj.	non Proj.
$\lvert Aut(H)\rvert$	1	4	2	-
	2	-	-	-
	3	14	2	2
	4	162	7	13
	6	312	5	20
	8	246	-	4
	12	37.426	54	801
	24	10.569.502	53	5.733

TAB. 1 – Classification des hypergroupes abéliens d'ordre 4

3 Les hypergroupes canoniques d'ordre 4

Théorème 3.1 *Il existe, à isomorphie près,* 8.366 *hypergroupes abéliens d'ordre 4 avec un élément neutre.*

Théorème 3.2 *Il existe, à isomorphie près,* 97 *hypergroupes canoniques d'ordre 4.*

Remerciements

Nous tenons à remercier le groupe spécial de recherche, et plus particulièrement Yoann Martinez qui nous a permis d'effectuer les calculs, ainsi que Patrice Deloche pour son aide constante.

Références

[1] E. Azzali. Ipergruppi commutativi definiti su un insieme di tre elementi.

[2] E. Azzali. Sull'ordinamento della classe delle strutture di ipergruppo su un insieme finito. In *Ipergruppi, altre strutture multivoche e loro applicazioni, Udine*, pages 137–145, 1985.

[3] R. Bayon and N. Lygeros. Les hypergroupes et H_v-groupes d'ordre 3. *soumis à Bulletin of the Greek Mathematical Society.*

[4] R. Bayon and N. Lygeros. Remarques sur les hypergroupes canoniques au sens de J. Mittas. *Perfection*, 5-10, 2004.

[5] R. Bayon and N. Lygeros. Hypergroupes et groupes d'automorphismes. *Perfection*, 6-1, 2005.

[6] R. Bayon and N. Lygeros. Les hypergroupes d'ordre 3. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, à paraître en 2005.

[7] R. Bayon and N. Lygeros. Catégories spécifiques d'hypergroupes d'ordre 3. In *Eléments structurels de la théorie des hyperstructures : Colloque de l'Université de Thrace*, mars 2005.

[8] M. Krasner. Approximation des corps valués complets de caractéristiques $\rho = 0$ par ceux de caractéristiques 0. In *Acte du Colloque d'Algèbre Supérieure, C.B.R.M.*, Bruxelles, 1956.

[9] N. Lygeros. Sur la notion de groupe d'automorphismes. *Perfection*, 5-8, 2004.

[10] F. Marty. Sur une généralisation de la notion de groupe. In *8ème congrès des Mathématiciens Scandinaves, Stockholm*, pages 45–49, 1934.

[11] F. Marty. Rôle de la notion d'hypergroupe dans l'étude des groupes non abéliens. *C. R. Acad. Sci. Paris Math.*, 1935.

[12] F. Marty. Sur les groupes et hypergroupes attachés à une fraction rationnelle. *Annales scientifiques de l'E.N.S.*, 53 :83–123, 1936.

[13] J. Mittas. Sur une classe d'hypergroupes commutatifs. *CRAS*, 269 :485–488, 1969.

[14] J. Mittas. Hypergroupes canoniques. *Mathematica Balkanica*, 2 :165–179, 1972.

[15] J. Mittas. Hypergroupes canoniques valués et hypervalués - hypergroupes fortement et supérieurement canoniques. *Bulletin of the Greek Mathematical Society*, 23 :55–88, 1982.

[16] Th. Vougiouklis. *Cyclicity of hypergroups*. PhD thesis, in Greek, 1980.

[17] H.S. Wall. Hypergroups. *American Journal of Mathematics*, 59 :78–98, 1937.