

ρούσαν να λύσουν εν μέρει το πρόβλημα της απαρίθμησης των Somas τουλάχιστον για τις μικρές τάξεις. Ο στόχος μας σ' αυτό το άρθρο είναι να υλοποιήσουμε υπολογιστικά τις εκτιμήσεις του Καραθεοδωρή. Σε αυτό το πλαίσιο θα κινηθούμε έχοντας όχι μόνο υπόψη την αλγεβροποίηση της θεωρίας μέτρου (βλ. Orus 3427), αλλά και τη θεωρία ομάδων μέσω των αυτομορφισμών των συνόλων με μερική διάταξη (βλ. Orus 3425).

Για δύο Somas έχουμε τα εξής αποτελέσματα.

Σημειώνουμε τα: S_1, S_2, S_4 και έχουμε:

$$S_3 = S_1 + S_2, S_5 = S_1 + S_4, S_6 = S_2 + S_4, S_7 = S_1 + S_2 + S_4$$

Οι πίνακες των S_i είναι οι εξής:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_2 \sim S_4$$

$S_3 \sim S_5$ Μέσω της συμμετρικής ομάδας

Κατά συνέπεια έχουμε 5 κλάσεις:

$$S_1 \rightarrow 1S_2 \rightarrow 2S_3 \rightarrow 3S_4 \rightarrow 4S_5 \rightarrow 5S_6 \rightarrow 6S_7 \rightarrow 7$$

Με τον ίδιο τρόπο για τρία Somas έχουμε τα εξής αποτελέσματα.

Σημειώνουμε τα $S_1, S_2, S_4, S_8, S_{16}, S_{32}$ και S_{64} και έχουμε:

$$S_3 = S_1 + S_2, S_5 = S_1 + S_4, S_6 = S_2 + S_4, S_7 = S_1 + S_2 + S_4, S_9 = S_1 + S_8, S_{10} = S_2 + S_8$$

$$S_{11} = S_1 + S_2 + S_8, S_{12} = S_4 + S_8, S_{13} = S_1 + S_4 + S_8, S_{14} = S_2 + S_4 + S_8, \dots$$

$$S_{125} = S_1 + S_4 + S_8 + S_{16} + S_{32} + S_{64}, S_{126} = S_2 + S_4 + S_8 + S_{16} + S_{32} + S_{64},$$

$$S_{127} = S_1 + S_2 + S_4 + S_8 + S_{16} + S_{32} + S_{64}$$

Κατά συνέπεια, έχουμε 39 κλάσεις:

$$S_1, S_2, S_3, S_6, S_7, S_{14}, S_{15}, S_{16}, S_{17}, S_{18}, S_{19}, S_{20}$$

$$S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{28}, S_{29}, S_{30}, S_{31}, S_{48}, S_{49}, S_{50}, S_{51}, S_{54}$$

$$S_{55}, S_{56}, S_{57}, S_{58}, S_{59}, S_{62}, S_{63}, S_{112}, S_{113}, S_{114}, S_{115}, S_{118}, S_{119}, S_{126}, S_{127}$$

Οι 39 κλάσεις δεν είναι ισόμορφες με τις δράσεις της συμμετρικής ομάδας τάξης 3.

Συνοψίζοντας αυτές τις δύο περιπτώσεις που προκύπτουν στη θεωρία των Somas του Καραθεοδωρή, έχουμε τα εξής υπολογιστικά αποτελέσματα:

5 κλάσεις γι 2 Somas και 39 κλάσεις για 3 Somas.

Έτσι είναι πλέον δυνατόν να γράφουμε τους τύπους που ήθελε ο Καραθεοδωρή για αυτές τις δύο περιπτώσεις αφού έχουμε μόνο $5 + 39$ κλάσεις.

Επιπλέον, οι υπολογιστικές ικανότητες δεν παύουν εδώ. Είναι δυνατόν να μελετήσουμε ακόμα και την επόμενη περίπτωση που εμπεριέχει θεωρητικά 32767 κλάσεις.

Αναφορές

Orus 2778: Notes sur la decomposition des somas de Caratheodory.

Orus 3425: Επαλήθευση της απόδειξης του Καραθεοδωρή περί ανεξαρτησίας των αξιωμάτων της θεωρίας των Somas μέσω της θεωρίας των συνόλων μερικής διάταξης.

Orus 3427: Η αλγεβροποίηση του Καραθεοδωρή της θεωρίας μέτρου μέσω της θεωρίας συνόλων με μερική διάταξη.

Orus 3567: Somas του Καραθεοδωρή ως κλάσεις συνόλου.