THEOREME DE DOUBLE INCLUSION SUR LES ENSEMBLES DE MANDELBROT GENERALISES

We establish a theorem of double inclusion on the generalized Mandelbrot sets that we note M_m (with $m \in \mathbb{R}$, and $m \geq 1$) exteanding thus the result of F.V Haeseler ($m = 2$), and one of J.H Hubbard ($m = +\infty$).

Introduction : On note $D(r) = \{z \in \mathbb{C}, /|z| \leq r\}$, $r \in \mathbb{R}_+$ et Σ la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Pour tout $c \in \mathbb{C}$, on note f_c l'application $z \to z^2 + c$ de Σ dans elle-même, et $K_c = \{z \in \mathbb{C}/f_c^n(z) \nrightarrow \infty\}$ (en notant f^n l'itérée $f \circ f \ldots f \circ f$). La frontière de K_c est l'ensemble de Julia de f_c. G. Julia [1] et P. Fatou [2] on montré que si $0 \in K_c$ l'ensemble K_c est connexe, sinon il est homéomorphe à l'ensemble de Cantor. On note M (l'ensemble de Mandelbrot) l'ensemble des $c \in \mathbb{C}$ tels que $0 \in K_c$. A. Douady et J.H Hubbard [3] ont démontré que M était connexe.

En utilisant une autre caractéristisation afin d'appliquer le théorème de L. de Branges, (ancienne conjecture de Bieberbach), F.V. Haeseler [4] à montré que :

$$M \subset D(2)$$

Cependant, c'est la première caractérisation de M que nous allons utiliser, elle est mentionnée par exemple dans l'article de P. Blanchard [5] :

$$M = \{c \in \mathbb{C}, /f_c^n(0) \nrightarrow \infty \text{ lorsque } n \to \infty\}$$

A l'aide de cette caractérisation nous allons étendre le résultat de Haeseler, et ce de façon élémentaire aux ensembles de Mandelbrot généralisés M_m définis par :

$$M_m = \{c \in \mathbb{C}/z_n = F_{c,m}^n(0) \nrightarrow \infty \text{ lorsque } n \to \infty\} \text{ avec } F_{c,m} \text{ l'application } z \to z^m + c (m \in \mathbb{R} \text{ et } m \geq 1)$$

Pour cette définition, voir par exemple l'article de Papathomas et Julesz [6]. La définition est choisie de façon à généraliser les résultats obtenus sur $\mathbb{R}$. Les théorèmes que nous établissons ne dépendent pas du choix de la définition de l'argument de z.

Comme l'on a trivialement $M_1 = D(0)$, nous étudierons M_m pour $m > 1$. Le théorème de Hubbard : $M_\infty = D(1)$ (en topologie de Hausdorff [7], sera démontré en corollaire, après la démonstration du théorème de double inclusion.

Théorème A : $(m > 1) : D(m^{i/(i-m)}(1 - m^{-i})) \subset M_m$

Démonstration : Nous allons utiliser le lemme suivant, qui assurera au théorème son caractère optimal :

Lemme : $a = m^{i/(i-m)}(1 - m^{-i})$ est le plus grand réel qui vérifie la propriété :

$$(m > 1)(\exists x \in \mathbb{R}_+ / x^m - x + a = 0)$$

Démonstration : On voit facilement que $a \in [0, 1[$ s'il existe. Or c'est le cas puisque la fonction $x^m - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, en particulier sur $]0, 1[$ elle atteint une valeur extrémale lorsque sa dérivée s'annule. Celle-ci s'annule en $m^{i/(i-m)}$, et comme $x^m - x < 0$ pour $x \in]0, 1[$, on a donc $a = m^{i/(i-m)}(1 - m^{-i})$ ∎

Démontrons à présent le lemme suivant, par récurrence :

Lemme : $(m > 1) \left[|z_i| \leq m^{i/(i-m)}(1 - m)^{-i}\right] \rightarrow \left[\forall n \in \mathbb{N}^* : |z_n| \leq m^{i/(i-m)}\right]$

La propriété est vraie à l'ordre i

Supposons la propriété vraie à l'ordre k et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $k + 1$. On a donc comme hypothèses : $|z_i| \leq m^{i/(i-m)}(1 - m^{-i})$ et $|z_k| \leq m^{i/(i-m)}$. On a :

$|z_{k+1}| = |z_k^m + z_i| \leq |z_k|^m + |z_i| \leq (m^{i/(i-m)})^m + m^{i/(i-m)}(1 - m^{-i})$

$|z_{k+1}| \leq m^{-i}.m^{i/(i-m)} + m^{i/(i-m)}(1 - m^{-i}) = m^{i/(i-m)}$ donc vraie. ∎

On a donc :

$$(m > 1) \left[|z_i| \leq m^{i/(i-m)}(1 - m)^{-i}\right] \rightarrow \left[\lim_{n\to\infty} |z_n| \leq m^{i/(i-m)}\right] \quad ∎$$

Théorème B : $(m > 1) : M_n \subset D(2^{i/(m-i)})$

Démonstration : Nous allons d'abord démontrer par récurrence le lemme suivant :

Lemme : $(m > 1) : (\epsilon \in \mathbb{R}_+^*) \left[|z_i| = 2^{i/(m-i)} + \epsilon\right] \rightarrow \left[|z_n| \geq 2^{i/(m-i)} + n^\alpha \epsilon\right]$ avec $\alpha = \frac{\ln(2m-1)}{\ln(2)}$

La propriété est vraie à l'ordre 1

Supposons la propriété vraie à l'ordre k et montrer qu'elle est vraie à l'ordre $k+1$. On a donc comme hypothèse $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $|z_i| = 2^{i/(m-i)} + \epsilon$ et $|z_k| \geq 2^{i/(m-i)} + k^\alpha \epsilon$. On a :

$$|z_{k+1}| = |z_k^m + z_i| \geq |z_k|^m - |z_i| \geq (2^{i/(m-i)} + k^\alpha \epsilon)^m - 2^{i/(m-i)} - \epsilon$$

$$|z_{k+1}| \geq 2.2^{i/(m-i)} + 2mk^\alpha \epsilon - 2^{i/(m-i)} - \epsilon = 2^{i/(m-i)} + \epsilon(2mk^\alpha - 1)$$

$$|z_{k+1}| \geq 2^{i/(m-i)} + \epsilon(k+1)^\alpha$$

donc vraie.

(on a bien $\forall k \in \mathbb{N}^*, 2mk^\alpha - 1 \geq (k+1)^\alpha$ car $(k+2)^\alpha \leq 2^\alpha(k/2+1)^\alpha \leq (2m-1)(k+1)^\alpha \leq 2m(k+1)^\alpha - 1)$

En faisant tendre n vers l'infini dans le lemme on obtient :

$(m > 1) : (\epsilon \in \mathbb{R}_+^*), \left[|z_i| = 2^{i/(m-i)} + \epsilon\right] \rightarrow [|z_n| \rightarrow \infty]$

c'est-à-dire

$$\left[z \in \mathbb{C}/D(2^{i/(m-i)}\right] \rightarrow [z \in \mathbb{C}/M_m]$$

et en prenant la contraposée on obtient le théorème.

Remarques : pour $n \in 2\mathbb{N}^*$ le théorème est optimal car alors $-(2^{i/(m-i)} \in M_m$. En effet $(-2^{i/(m-i)})$ est un point de Misiurewicz pour M_m.

On peut montrer tout aussi facilement que l'on a établit ce théorème, que si un itéré d'un point $z \in \mathbb{C}$ donné, sort du disque mentionné alors le point en question n'appartient pas au M_m correspondant, on obtient ainsi un critère de non-appartenance à M_m.

En utilisant ce résultat, on montre que pour $m \in 2\mathbb{N}^* + 1$, $M_m \cap \{z \in \mathbb{C}/ |z| = 2^{i/(m-i)}$ est vide, donc M_m, qui est fermé est à distance non nulle du cercle précédent.

Nous retrouvons le résultat de F.V. Haeseler en prenant $n = 2$.

Finalement, on a donc :

Théorème AB : $(m > 1) D(m^{i/(i-m)}(1 - m^{-i}) \subset M_m \subset D(2^{i/(m-i)})$

En se plaçant dans la topologie de Hausdorff, et en remplaçant n par l'infini dans le théorème, on obtient le théorème de Hubbard. Ce passage à la limite ne peut s'effectuer dans la topologie euclidienne, en effet, M_∞ ne peut être définit classiquement. Ce phénomène est dû entre autre, à la cyclicité des racines n^{ime} de l'unité. Ainis, on a :

Il est donc nécessaire d'introduire la topologie de Hausdorff pour parler de M_∞. Cependant, celle-ci, de par sa définition même ne se préoccupe point du caractère singulier du cercle unité. Il serait sans doute intéressant de savoir si l'intersection de ce cercle avec M_m à la puissance du continu pour $m \geq 2$, comme c'est le cas pour l'ensemble de Mandelbrot.

N. Lygeros reçu le 14.05.1990.

Références :

[1] G. Julia : Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. J. Math. Pures et Appl., 4. 1918, p47-245.

[2] P. Fatou : Sur les équations fonctionnelles. Bulletin Soc.Math.Fr., 47, 1919, p161-271 ; et 48, 1920, p33-94 et 208-314.

[3] A. Douady, J.H. Hubbard : Iteration des polynômes quadratiques complexes. C.R. Acad.Sc.Paris série 1, t.294, 1982, p123-126

[4] F.V. Haeseler. Uber sofortige Attraktiongebiete superattraktiver Zyklen. Dissertation Universität Bremen, 1985

[5] P. Blanchard. Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere. Bull. Amer. Math. Soc, 11, 1984 p85-141

[6] T.Papathomas, B. Julesz. Animation with fractals from variations on the mandelbrot set. The Visual Computer, 3, 1987, p23-26.

[7] J. Hubbard, L.R. Golberg, R.L. Devaney, Dynamical approximation to the exponential map by polynomials. Mathematical Sciences Research Institute Berkeley California. Technical Report MSRI 10019-86, 1986

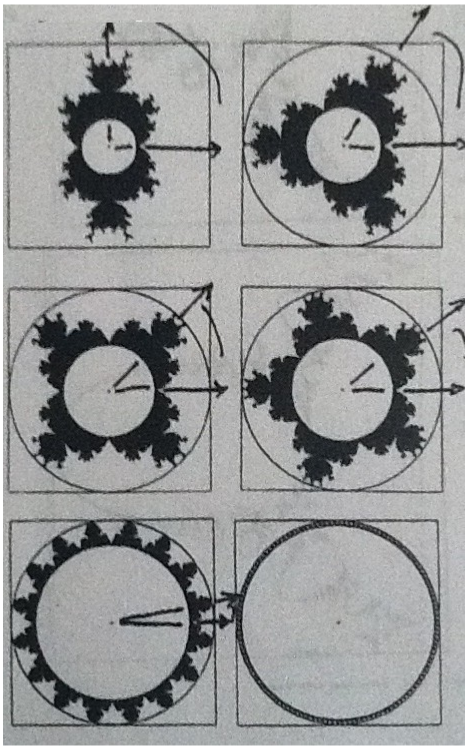
Bibliographie

H.-O Peitgen, P.H. Richter : The beauty of fractals (images of complex dynamical systems). Springer-Verlag, 1987

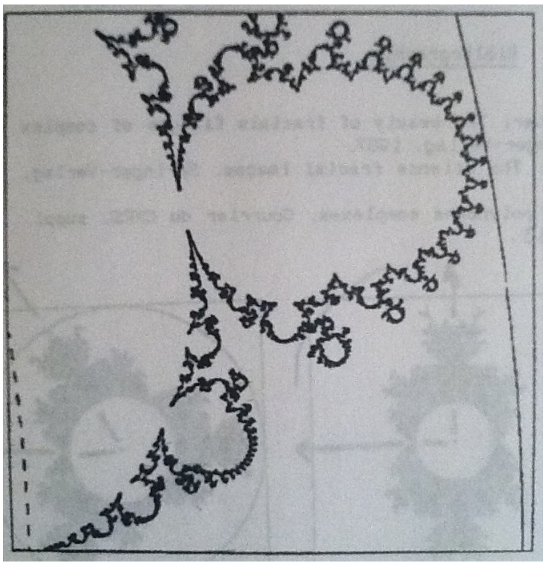
H.-O Peitgen, D. Sauper : The science fractal images. Springer-Verlag, 1988

A. Douady : Itérations de polynômes complexes. Courrier du CNRS, suppl. n°62, Paris, 1985, p25-33.

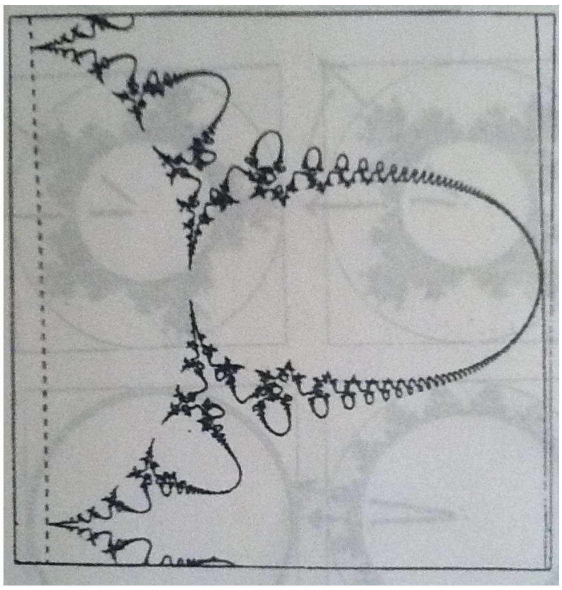
M_m pour $m = 3, 4, 5, 6, 17$ et 129. Le disque intérieur est blanchi et le cerle extérieur est tracé. L'invariance triviale par rotation d'angle $2\pi/(m-1)$ permet pour les images suivantes de ne représenter qu'une partie de M_m.



Un agrandissement de la partie qui se répète $m-1$ fois dans M_m, pour $m = 17$ puis $m = 129 = 2^7 + 1$ (valeurs facilitant les calculs). Seules sont tracées les frontières M_m, du disque intérieur en pointillés et du disque extérieur. $(x, y) \in [0.78; 1.05] \times [0; 0.27]$



$(x, y) \in [0.952; 1.006] \times [-0.004; 0.050]$



Idem pour $m = 32769 = 2^{15} + 1$
$M_{2.125}$ avec $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$ dans l'expression de $z^m = |z|^m.e^{im\arg(z)}$