Unimodalité des petits posets

N. Lygeros et Hazim-Sharif

Abstract: *All the posets on at most 11 elements share the unimodality property when they are ordered according to the relation, height and width parameters.*

On note respectivement P_n^r, P_n^h, P_n^l nombre de posets à n sommets ayant r relations, h pour hauteur, l pour largeur. La notion de hauteur (voir [1]) d'un poset p est définie comme le maximum sur toutes les chaînes dans p du nombre de points de la chaîne, et la notion de largeur (voir [1]) d'un poset p est définie comme le maximum sur toutes les antichaines dans p du nombre de points de l'antichaine.
Toutes les conjectures dans notre précédent article [2] sont vérifiées par les posets à 11 éléments qui ont été obtenus par J. Culberson et G. J. Rawlins [3]. Ils ont en particulier confirmé la conjecture de Fraïssé :

Conjecture F : Pour n fixé, la suite P_n^r est unimodale.

Le premier auteur travaillant sur l'extensibilité des posets via la hauteur eut alors l'idée de transposer la conjecture F sur cette dernière notion et calcula sa validité sur tous les posets à au plus 7 élément ce qui l'amena à poser :

Conjecture H : *Pour n fixé, la suite* P_n^h *est unimodale.*

Qui est vraie jusqu'à n = 11 comme le montre le tableau suivant obtenu par notre programme - pour des algorithmes de dénombrement des posets voir [3].

$$P_n^{n+1-h},\ \ n \in [1,11],\quad h \in [1,n]$$

n \ h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1										
2	1	1									
3	1	3	1								
4	1	6	8	1							
5	1	10	31	20	1						
6	1	15	84	162	55	1					
7	1	21	185	734	940	163	1				
8	1	28	356	2380	7305	6372	556	1			
9	1	36	623	6259	35070	86683	52336	2222	1		
10	1	45	1016	14258	125597	619489	1261371	534741	10765	1	
11	1	55	1569	29241	370057	3012577	13452868	22902794	6915309	64955	1

À l'aide d'un raisonnement et de méthodes analogues on a :

Conjecture L : *Pour n fixé, la suite* P_n^l *est unimodale.*

et le tableau des valeurs pour n ≤ 11 :

$P_n^{n+1-l}, \ n \in [1,11], \ \ l \in [1,n]$

n \ l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1										
2	1	1									
3	1	3	1								
4	1	5	9	1							
5	1	7	29	25	1						
6	1	9	63	170	74	1					
7	1	11	112	636	1060	224	1				
8	1	13	179	1727	7289	7079	710	1			
9	1	15	265	3920	32623	93299	50797	2310	1		
10	1	17	373	7900	113379	727712	1320680	389497	7724	1	
11	1	19	504	14644	335328	4107528	18630499	20465722	3168869	26312	1

Remarques :

Nous pensons que ce serait une erreur de considérer ces conjectures comme évidentes ou au moins naturelles. En effet M. Pouzet et I. Rosenberg [4] avaient conjecturé que le profil de certaines relations était unimodal et cela paraissait naturel, néanmoins D. Stanton [5] en utilisant un ordinateur a trouvé un contre-exemple à 24 éléments dans le domaine des partitions !

La similarité des définitions des notions de hauteur et largeur d'un poset est sans doute la cause du fait que lorsque le nombre de posets prend ses valeurs maximales pour *n* fixé alors hauteur = largeur et ces valeurs sont du même ordre de grandeur.

Nous remercions C. Chaunier pour ses conseils informatiques ainsi que M. Pouzet pour l'indispensable matériel informatique qu’il a su nous procurer.

Hazim-Sharif et N. Lygeros

Références

[1] Peter C. Fishburn : Thicknesses of ordered sets. SIAM J. Disc. Math. vol. 3 n°4, p. 489_501, 1990.
[2] R. Fraïssé et N. Lygeros : Petits posets : dénombrement, représentabilité par cercles et « compenseurs ». CRAS, 1991.
[3] J. Culberson et G. Rawlins: New results from an algorithm for counting posets. Order 7. 1991, p. 361-374.
[4] M. Pouzet et I. Rosenberg: Sperner properties for groups and relations. Europ. J. Combinatorics 7, 1986, p. 349-370.
[5] D. Stanton: Unimodality and Young’s lattice. J. Comb. Theory series A vol. 54 n°1, 1990, p. 41-53.