Une introduction aux dendrominos

N. Lygeros, J. Scoville

Traduit de l'anglais par Patrice Deloche

Cet article traite d'une classe spéciale de polyominos – les polyominos non divisés de surface minimale. Plus intuitivement, ces polyominos forment des chaines non ramifiées avec des extrémités distinctes. La surface A et le périmètre P d'un tel polyomino sont reliés par P=2(A+1). Comme le dual d'un polyomino sur un treillis carré est un arbre, nous appellerons ces constructions des *dendrominos*. Les frontières d'un dendromino sont les cellules dont les maxima dans l'arbre dual sont de degré un. Un dendromino de n>1 cellules a exactement deux cellules frontières.
Voici des exemples de dendrominos :

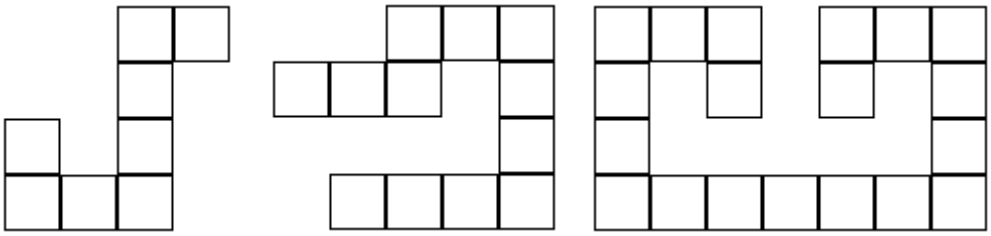


Figure 1 : Dendrominos

Le dendromino le plus à droite est un membre d'une classe spéciale de dendrominos. Comme aucune cellule ne peut être ajoutée pour fabriquer un dendromino plus grand, nous disons qu'il s'agit un *dendromino terminal*. Un dendromino terminal minimal est un dendromino terminal avec un nombre minimal de cellules. Le dendromino le plus à droite ci-dessus est un dendromino terminal minimal à deux dimensions, constitué de 19 cellules. En trois dimensions, le dendromino terminal minimal a 23 cellules :

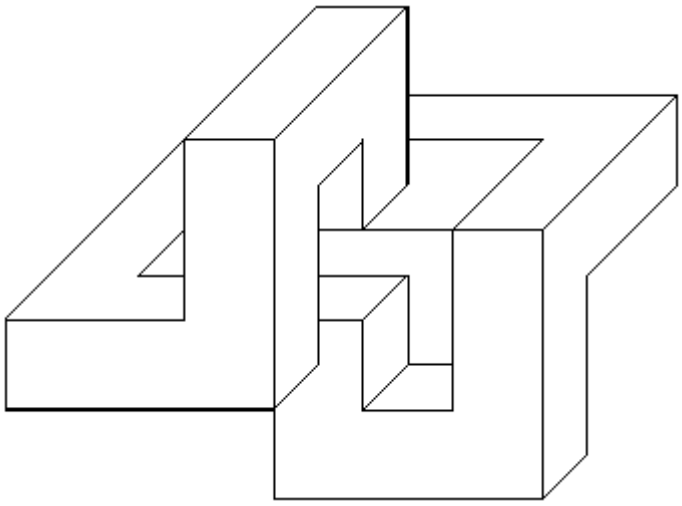


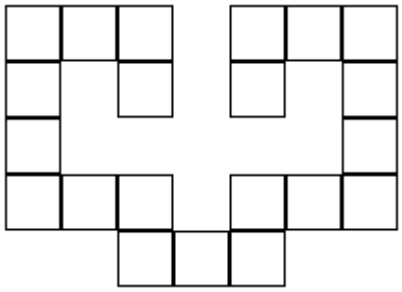
Figure 2 : Le dendromino terminal minimal 3-D a 23 cellules.

Comme le n-cube pave le n-espace, le concept de dendromino cubique s'étend naturellement aux dimensions plus élevées. En général, le dendromino terminal minimal à n dimensions a 8n-1 cellules. Un arrangement minimal est produit lorsque les cellules sont placées aux positions +/- 1 sur l'axe des x et +/-2 sur chaque axe. Ces cellules sont alors connectées par des chemins minimaux pour former un dendromino. La section z-w du dendromino terminal minimal 4-D est la suivante :

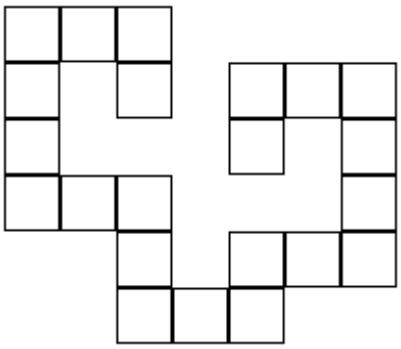
	x=-2	x=-1	x=0	x=1	x=2
y=2	....	....	..X.. ..X.. ..XXX	....	....
y=1	....	....	..X.. ....X	....	....
y=0	.... XXX..	.... X.X..	XXX.. X.... X...X ....X..	....X.. ....X..	....X.. ..X.. ..X..
y=-1	....	....	....X ....X..	....	....
y=-2	....	....	....X ....X ..XXX	....	....

Figure 3 : Un dendromino terminal minimal 4-D a 31 cellules.

Des dendrominos terminaux avec k cellules existent pour tout k>18 en deux dimensions. Ceux-ci peuvent être construits en ajoutant des cellules par multiples de deux aux dendrominos à 19 et à 20 cellules. En trois dimensions, des dendrominos terminaux existent pour tout k>29. On ne sait pas si des dendrominos terminaux pairs existent à trois dimensions pour k<30.



Dendromino à 21 cellules



Dendromino à 22 cellules

À des dimensions plus basses, les dendrominos ne sont pas limités à un treillis cubique. À deux dimensions, par exemple, des dendrominos peuvent aussi exister sur des treillis triangulaire et hexagonal. Le dendromino terminal minimal sur un treillis hexagonal a 13 cellules et le dendromino terminal minimal sur un treillis triangulaire a 20 cellules.

Le remplissage maximal d'un n-cube de c de longueur d'arête k (où k est impair) par un dendromino est de 2((k+1)/2)^n-1 cellules. À deux dimensions, il est possible d'obtenir un remplissage maximal avec un dendromino terminal.

Nous adressons des remerciements spéciaux à Jim Ferry pour ses contributions mathématiques et à Jennifer Kasten pour ses services de traduction.

Références :

N. Madras, C.E. Soteros, S.G. Whittington, J.L. Martin, M.F. Sykes, S. Flesia and D.S. Gaunt : The free energy of a collapsing branched polymer. Journal of Physics A: Mathematical and General, 23, p.5327-5350. 1990.

S. Flesia, D.S. Gaunt, C.E. Soteros, S.G. Whittington : Statistics of collapsing lattice animals. Journal of Physics A: Mathematical and General, 27, p.5831-5846. 1994

R. Stanley : Enumerative Combinatorics. Cambridge University Press 1997.