

L'entité des hypergroupes comme révélatrice de notions mathématiques

N. Lygeros

Une des principales difficultés des notions mathématiques même lorsque celles-ci sont considérées comme relativement élémentaires c'est leur profondeur car celle-ci est rarement directement accessible. La compréhension de la profondeur nécessite parfois une généralisation des concepts pour être pleinement réalisée. Pour illustrer ce schéma mental de manière explicite nous avons choisi les notions mathématiques de cyclicité et de commutativité.

En théorie des groupes élémentaire la notion de cyclicité est fondamentale car les groupes cycliques représentent d'une part les groupes les plus accessibles et ceux dont on a une bonne connaissance et d'autre part des exemples concrets de groupes simples. Par nature les groupes cycliques sont constitués d'un seul élément générateur générique. En d'autres termes, tout élément d'un groupe cyclique peut être interprété comme une puissance particulière de l'élément générique. Ainsi le caractère abélien du groupe cyclique est immédiat puisque cela revient à utiliser la commutativité des puissances. Nous en déduisons donc que l'ensemble des groupes cycliques est inclus dans l'ensemble des groupes abéliens. Cette proposition malgré son caractère élémentaire cache néanmoins via la profondeur de la cyclicité une complexité noétique.

En effet si nous généralisons l'entité des groupes à celle des hypergroupes comme l'a fait pour la première fois en 1934 F. Marty à savoir en utilisant d'une part l'axiome de reproduction i.e. $\forall x \in H$ nous avons et d'autre part l'associativité i.e. $\forall a, b, c \ a \perp (b \perp c) = (a \perp b) \perp c$ alors nous pouvons étudier plus en profondeur la complexité de la cyclicité. En 1980 Th. Vougiouklis a démontré qu'il n'existe à isomorphie près que 8 (huit) hypergroupes différents d'ordre 2. Parmi ceux-ci se trouve un seul groupe qui est bien sûr le groupe cyclique à 2 éléments. Cependant le plus important c'est que parmi les 7 hypergroupes cycliques au sens de H.S. Wall, il existe deux hypergroupes qui ne sont pas commutatifs. Plus précisément il s'agit de :

$$H_1 \quad a \perp a = \{a, b\}, a \perp b = \{a, b\}, b \perp a = \{a\} \text{ et } b \perp b = \{b\}$$

$$H_2 \quad a \perp a = \{a, b\}, a \perp b = \{a\}, b \perp a = \{a, b\} \text{ et } b \perp b = \{b\}$$

Ainsi la notion de commutativité ne découle pas de manière générale de la cyclicité. Nous voyons donc que la théorie des groupes élémentaire en forçant l'existence d'une propriété locale cache la possibilité d'existence d'une propriété globale sans aspect local et qui ne puisse pas générer la commutativité. Il est donc clair qu'une entité nettement postérieure en termes de création aux notions de commutativité et de cyclicité permet d'observer sous un angle nouveau puisque la proposition sur l'implication de la commutativité par la cyclicité ne supporte pas la généralisation qui transforme un groupe en hypergroupe. Aussi si nous suivons la méthodologie introduite par A. Grothendieck pour démontrer un théorème, nous devons exclure l'utilisation de cette proposition de nos heuristiques. Et il en est de même pour la proposition qui affirme que deux groupes cycliques du même ordre sont isomorphes puisque nous avons obtenu sept hypergroupes cycliques non-isomorphes et qui ont pourtant le même ordre.