Remarques sur les hypergroupes, la commutativité et la cyclicité

N. Lygeros

Résumé : Dans cette note, nous étudions les hypergroupes, la commutativité et la cyclicité et nous explicitons des caractéristiques suffisantes d'appartenance aux catégories générées via l'introduction de la notion de projectivité.

Proposition : $\forall n > 1$, il existe un hypergroupe commutatif non cyclique d'ordre n.

Démonstration :
Considérons la famille F_n définie par : $\forall x \in F_n \ : \ x \perp x = x$
et $\forall (x, y) \in F_n^2$ avec $x \neq y : x \perp y = F_n$ et montrons que $\perp$ vérifie l'axiome de reproduction et que $\perp$ est associative.
1) Axiome de reproduction : $x \perp F_n = \{x \perp x\} \cup \{x \perp y \,/\, y \in F_n - \{x\}\} = F_n \perp x = F_n$
2) Associativité : si $x \neq y, y \neq z, z \neq x : x \perp (y \perp z) = x \perp F_n = F_n \perp x = (x \perp y) \perp z$
si $x = y$ et
$x \neq z : x \perp (y \perp z) = x \perp F_n = (x \perp y) \perp F_n = (x \perp y) \perp z$
Donc $F_n = H_n$ est une famille d'hypergroupes commutatifs non cycliques d'ordre n. □

Considérons à présent uniquement la propriété projective, à savoir : $\forall x \in H, x \perp x = x$, sans la propriété de commutativité.

Théorème : Si $|H| = 2$ est un hypergroupe qui vérifie la propriété projective alors H est un hypergroupe commutatif non cyclique et il est unique à isomorphie près.

Démonstration :
Comme H est un hypergroupe, il vérifie l'axiome de reproduction et l'associativité.
Notons (1), (2), (3), (4) respectivement les produits : $a \perp a, a \perp b, b \perp a, b \perp b$.
Pour que l'axiome de reproduction soit vérifié il faut que :
(1) et (2) engendrent H et cela implique que $\{b\} \subseteq a \perp b$
(3) et (4) engendrent H et cela implique que $\{a\} \subseteq b \perp a$
(1) et (3) engendrent H et cela implique que $\{b\} \subseteq b \perp a$
(2) et (4) engendrent H et cela implique que $\{a\} \subseteq a \perp b$
Nous en déduisons que $a \perp b = b \perp a = \{a, b\} = H$ donc H est commutatif.
Comme $\forall x \in H, x \perp x = x$, il ne peut exister un x tel que $H = x^1 \cup x^2$ donc H n'est pas cyclique. Enfin d'après la proposition précédente H vérifie l'associativité. De

plus, d'après la classification de Vougiouklis des hypergroupes d'ordre 2, il n'existe qu'un seul hypergroupe non cyclique donc H est unique à isomorphie près.□

Il est donc nécessaire de considérer les quatre catégories engendrées par la commutativité et la cyclicité qui forment une partition naturelle pour les hypergroupes.

Proposition : Si $|H| = 2$ alors il existe 5 hypergroupes commutatifs et cycliques, 2 hypergroupes cycliques et non commutatifs et un hypergroupe commutatif et non cyclique.

Remarque : Le plus petit hypergroupe, non commutatif et non cyclique est d'ordre 3, pour le vérifier il suffit de considérer l'hypergroupe défini par :
$\forall x, x \perp x = x$ et $\forall x, y \;\; x \neq y, x \perp y = \{a,b,c\}$ sauf $a \perp b = \{a,b\}$.
Il est donc plus petit que le groupe des quaternions qui est d'ordre 8. L'existence de cet hypergroupe montre qu'il ne s'agit pas d'une dégénérescence de la généralisation.

Proposition : Si H est un hypergroupe de longueur 1 et un de ses éléments vérifie la propriété projective alors H est un groupe.

Démonstration :
Soit a tel que $a \perp a = a$. Comme $\perp$ est associative nous avons $a \perp (a \perp b) = (a \perp a) \perp b$ et comme H est de longueur 1 posons $a \perp b = x$, nous obtenons $a \perp x = a \perp b = x$. Comme $\perp$ vérifie l'axiome de reproduction x ne peut être différent de b donc x=b. Ainsi a est neutre à gauche pour tout élément de H. Par un raisonnement analogue, à partir de $b \perp (a \perp a) = (b \perp a) \perp a$ nous montrons que a est neutre b à droite. Ainsi a est élément neutre et donc H est un groupe.□

Proposition : Si H est un hypergroupe de longueur 1 alors il a un élément projectif.

Démonstration :
Via l'axiome de reproduction nous avons $x \perp y = x \perp z \Rightarrow y = z$ sinon nous ne pouvons avoir l'ensemble H. Pour la même raison quelque soit x de H, il existe un a tel que : $x \perp a = x$. Nous avons donc : $(x \perp a) \perp a = x \perp a = x$, comme $\perp$ est associative $x \perp (a \perp a) = (x \perp a) \perp a$ donc il existe un élément a tel que $a \perp a = a$.□
Nous en déduisons donc le théorème suivant.

Théorème : Un hypergroupe de longueur 1 est un groupe.

Cette façon de procéder nous permet d'aboutir au résultat précédent sans utiliser le théorème de Marty à savoir que tout hypergroupe simplifiable d'un côté est un groupe. Ainsi nous voyons que la propriété projective peut jouer un rôle important dans l'obtention de résultats élémentaires sur les hypergroupes.