

Sur les hypergroupes rigides

N. Lygeros

Définitions :

Axiome de reproduction : $\forall x \in H : x \perp H = H \perp x = H$

Associativité : $\forall (a,b,c) \in H^3 : a \perp (b \perp c) = (a \perp b) \perp c$

Hypergroupe : (au sens de F. Marty) Ensemble H muni de la $\perp$ qui vérifie l'axiome de reproduction et l'associativité.

Hypergroupe rigide : Hypergroupe dont le groupe d'automorphismes est trivial.

Proposition : Il n'existe que deux hypergroupes rigides d'ordre 2.

Démonstration : Soit $H = \{a, b\}$. Comme $a \perp b$ doit être stable sous l'action de S_2 on a : $\{a, b\} \subseteq a \perp b$. Idem pour $b \perp a$. Ainsi $a \perp b = b \perp a = \{a, b\} = H$.

Quand à $x \perp x$, pour l'ordre 2, nous n'avons que deux choix $x \perp x = x$ ou $x \perp x = H$.

Nous n'avons donc que deux hypergroupes rigides naturels i.e.

$\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b\}$, $\{b\}$ et $\{a, b\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b\}$

et ce sont tous les deux des hypergroupes l'un projectif et l'autre cyclique d'ordre 2.

Remarque : Cela confirme les résultats de la classification de Vougiouklis des hypergroupes d'ordre 2.

Remarque : $\forall (x, y) \in H : \{x, y\} \subseteq x \perp y$.

Proposition : $(H, \cup)$ est un hypergroupe rigide.

Démonstration :

Axiome de reproduction : $a \perp H = a \cup H = H \cup a = H \perp a = H$

Associativité : $a \perp (b \perp c) = a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c = (a \perp b) \perp c$

Rigidité : $(H, \cup)$ est commutatif puisque $a \cup b = b \cup a$

$(H, \cup)$ est projectif puisque $\forall x \in H : x \perp x = x$.

L'union est stable sous l'action du groupe symétrique.

Proposition : $\{H : \forall x \in H : x \perp x = x \text{ et } \forall (x, y) \in H^2 : x \neq y : x \perp y = H\}$ est un hypergroupe rigide.

Démonstration : Analogue.

Proposition : $(H : \forall (x, y) \in H^2 : x \perp y = H)$ est un hypergroupe rigide.

Démonstration : Analogue.

Proposition : $\{H: \forall x \in H \ x \perp x = C_H x \text{ et } \forall (x,y) \in H^2 \ x \perp y = x \cup y\}$

Démonstration : Analogue.

Théorème : Il n'existe que six hypergroupes rigides d'ordre 3.

Démonstration :

- Considérons d'abord la notion de complétion. Il s'agit de compléter le résultat de l'hyperloi en lui adjoignant les éléments non présents quand $x \neq y$ en exploitant les résultats des propositions précédentes.

- Puis nous n'avons que deux hypergroupes rigides projectifs, l'union et sa complétion i.e.

H_1 a, ab, ac, ab, b, bc, ac, bc, c

et $\overline{H_1}$ a, abc, abc, abc, b, abc, abc, abc, c.

Nous n'avons que deux hypergroupes rigides cycliques, l'exclusion et sa complétion ainsi que la totalité et sa complétion i.e.

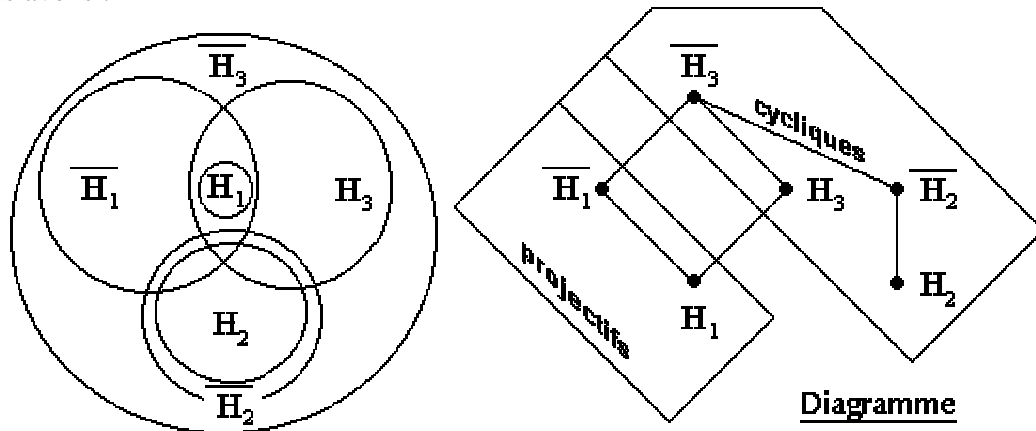
H_2 bc, ab, ac, ab, ac, bc, ac, bc, ab (exclusion car $x \perp x = C_H x$)

$\overline{H_2}$ bc, abc, abc, abc, ac, abc, abc, abc, ab (complétion de l'exclusion)

H_3 abc, ab, ac, ab, abc, bc, ac, bc, abc (totalité car $x \perp x = H$)

$\overline{H_3}$ abc, abc, abc, abc, abc, abc, abc, abc, abc (complétion de la totalité).

Remarque : Dans le cas de la complétion nous avons : $H_i \subseteq \overline{H_i}$. Et plus explicitement nous avons :



Pour les hypergroupes rigides projectifs, l'hypergroupe de l'union est minimal.

Pour les hypergroupes rigides, l'hypergroupe de la complétion de la totalité est maximal.

Nous voyons donc que pour les hypergroupes, il est plus normal de considérer le résultat de l'hyperloi que les éléments de l'hypergroupe considéré puisque la structure ensembliste est plus riche et permet l'existence d'une classification.