

Περί προσέγγισης του Αρχιμήδη της ρίζας 3

N. Λυγερός

Από το απόσπασμα που απέμεινε της μελέτης του Αρχιμήδη περί μέτρησης του κύκλου, γνωρίζουμε ότι έχει χρησιμοποιήσει δύο προσεγγίσεις της ρίζας του 3 με κλάσματα. Η πρώτη προσέγγιση είναι το κλάσμα $265/153$ και η δεύτερη, το κλάσμα $1351/780$. Καθώς δεν υπάρχουν αναλυτικές σημειώσεις του Αρχιμήδη για τον τρόπο εύρεσης, δεν υπάρχει μια κοινή θεώρηση των ειδικών, εκτός από την ιδέα της χρήσης μιας πρώτης προσέγγισης του τύπου $5/3$. Σε μια εποχή, όπου ο υπολογισμός της ρίζας ενός αριθμού, είναι τετριμμένος, μπορεί αυτός ο προβληματισμός να φαίνεται ότι δεν έχει νόημα. Υπάρχουν όμως δύο λόγοι που δικαιολογούν την εξέταση του προβλήματος. Ο πρώτος είναι καθαρά επιστημολογικός, διότι μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε την εξέλιξη μιας έννοιας, ειδικά σε μια ιστορική περίοδο, όπου η αρίθμηση ήταν πολύπλοκη διότι δεν είχε βρεθεί ένας αποτελεσματικός τρόπος της διατύπωσής της και έπρεπε ο κάθε μελετητής της μέσω της ευρηματικότητας του να ανακαλύψει μια ειδική μεθοδολογία, πράγμα το οποίο κατάφερε ο Αρχιμήδης με εξαιρετικά αποτελέσματα. Ο δεύτερος λόγος αφορά καθαρά τα μαθηματικά με την έννοια ότι σχετίζεται με την πολυπλοκότητα του αλγόριθμου και με τους τομείς που αγγίζει. Σε αυτό το πλαίσιο υπάρχει μια ιεράρχηση της μεθοδολογίας και αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να κατανοήσουμε βαθύτερα μια έννοια και να μην παραμείνουμε σε μια απλοϊκή προσέγγιση. Σε πρώτο στάδιο για να καταλάβουμε το κατόρθωμα του Αρχιμήδη αρκεί να συγκρίνουμε την ακρίβεια των προσεγγίσεών του με τον γνήσιο υπολογισμό της ρίζας 3. Αυτός ο αριθμός σε δεκαδικό σύστημα με υποδιαστολή γράφεται: 1,73205080... Ενώ το κλάσμα $265/153$ γράφεται: 1,732026..., και το κλάσμα $1351/780$ γράφεται: 1,732051. Βλέπουμε ότι το πρώτο έχει σωστά 4 ψηφία και το δεύτερο 5 ψηφία. Αυτή η ακρίβεια προϋποθέτει μια μεθοδολογία προσεχτική. Ένας τρόπος για να καταλάβουμε την ακρίβεια του είναι ο εξής. Αν θεωρούμε ότι το κλάσμα $5/3$ είναι η αρχική προσέγγιση είναι για τον ακόλουθο λόγο. Ο αριθμός 25 είναι το πιο κοντινό τετράγωνο από τον αριθμό 27, ο οποίος είναι ο κύβος του 3. Κατά συνέπεια έχουμε: $(25 \sim 27) \Leftrightarrow (\sqrt{25} \sim \sqrt{27}) \Leftrightarrow (5 \sim 3\sqrt{3})$ άρα $\sqrt{3} \sim 5/3$. Βέβαια το κλάσμα $5/3$ ισούται με 1,666666... που δεν δίνει μια σοβαρή προσέγγιση αλλά είναι της ίδιας τάξης. Επιπλέον με αυτή τη μέθοδο που είναι περιορισμένη σε εύρος, μπορούμε να κάνουμε την εξής γενίκευση. Εξετάζουμε πρώτα τις δυνάμεις του τρία: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683. Στη συνέχεια κρατάμε μόνο τους περιττούς εκθέτες και έχουμε: 3, 27, 243, 2187 και 19683. Τώρα μπορούμε να ακολουθήσουμε τη σειρά των προηγούμενων υπολογισμών κι έχουμε: $(243 \sim 256) \Leftrightarrow (\sqrt{243} \sim \sqrt{256}) \Leftrightarrow (9\sqrt{3} \sim 16)$

$$\text{άρα } \sqrt{3} \sim 16/9 = 1,77 \dots$$

$$(2187 \sim 2209) \Leftrightarrow (27\sqrt{3} \sim 47)$$

$$\text{άρα } \sqrt{3} \sim \frac{47}{27} = 1,740740 \dots$$

$$(19600 \sim 19683) \Leftrightarrow (81\sqrt{3} \sim 140)$$

$$\text{άρα } \sqrt{3} \sim \frac{140}{81} = 1,72839 \dots$$

Με αυτές τις πράξεις, όπου περιοριζόμαστε σε περιττές δυνάμεις του 3, δεν έχουμε την ίδια απόδοση αφού χρειαζόμαστε 5-ψηφίο αριθμό, 19600, για να πετύχουμε μία 2-ψήφια ακρίβεια. Με άλλα λόγια, ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε την εξίσωση $3X^2 = Y^2$ δίχως να βάλει τον περιορισμό των δυνάμεων του τρία. Ας εξετάσουμε λοιπόν τα κλάσματα του Αρχιμήδη.

$$\begin{aligned} 153^2 &= 23409, & 780^2 &= 608400 \\ 3 \cdot 153^2 &= 70227, & 3 \cdot 780^2 &= 1825200 \\ 265^2 &= 70225, & 1351^2 &= 1825201 \end{aligned}$$

Και βλέπουμε, με αυτόν τον τρόπο ότι ο Αρχιμήδης έχει επιλέξει πολύ κοντά τετράγωνα για να κατασκευάσει τις προσεγγίσεις του. Ας εξετάσουμε με διαφορετικό τρόπο την καλύτερη προσέγγισή του, για να επινοήσουμε μια μεθοδολογία εφικτή με τις γνώσεις της εποχής.

Ας μελετήσουμε λοιπόν την εξίσωση:

$$Y^2 - 3X^2 = 1 \quad \text{ή} \quad Y^2 - 1 = 3X^2$$

Έχουμε λοιπόν $(Y - 1)(Y + 1) = 3X^2$
 Κατά συνέπεια $3|(Y - 1)$ ή $3|(Y + 1)$
 Εάν $3|(Y - 1)$ έστω: $Y - 1 = 3A$
 $3A(3A + 2) = 3X^2$
 $A(3A + 2) = X^2$ άρα X δεν είναι περιττός.

Λόγω του τετραγώνου, επιλέγουμε A άρτιο, αλλιώς $3A + 2$ θα ήταν άρτιος, χωρίς όμως δυνατότητα ύπαρξης δύναμης άρτιας του δύο.

Έστω: $A = 2B$, έχουμε:
 $2B(3 \cdot 2B + 2) = X^2$ άρα $2|X$
 Έστω $X = 2W$
 $B(3B + 1) = W^2$ και W δεν είναι πρώτος.
 Για τον ίδιο λόγο επιλέγουμε B περιττό.
 Έστω: $B = 2C + 1$
 $(2C + 1)(2 \cdot 3 \cdot C + 2 \cdot 2) = W^2$
 $2(2C + 1)(3 \cdot C + 2) = W^2$ άρα $2|W$
 Έστω: $W = 2V$
 $(2C + 1)(3C + 2) = 2V^2$ άρα $2|(3C + 2)$
 κατά συνέπεια $2|C$
 Έστω: $C = 2D$

$$\begin{aligned} (4D + 1)(2 \cdot 3 \cdot D + 2) &= 2V^2 \\ (4D + 1)(3D + 1) &= V^2 \end{aligned}$$

Πάλι λόγω του τετραγώνου

Επιλέγουμε $D = 2E$

$$(8E + 1)(6E + 1) = V^2$$

Άρα $2 \nmid V$. Έστω: $V = 2U + 1$

$$(8E + 1)(6E + 1) = (2U + 1)^2$$

$$48E^2 + 14E + 1 = 4U^2 + 4U + 1$$

$$24E^2 + 7E = 2(U^2 + U)$$

Άρα $2 \mid E$. Έστω $E = 2F$

$$48F^2 + 7F = U(U + 1)$$

Καθώς $U(U + 1)$ είναι άρτιος, $2 \mid F$

Έστω $F = 2G$ έχουμε:

$$96G^2 + 7G = \frac{U(U + 1)}{2}$$

Αν συνοψίσουμε τους υπολογισμούς μας έχουμε:

$$X = 2W = 4V = 4(2U + 1)$$

$$\text{και } Y - 1 = 6(4D + 1) = 6(8E + 1) = 6(16F + 1)$$

$$Y - 1 = 6(32G + 1)$$

Από την εξίσωση έχουμε ότι $G \mid U(U + 1)$ και ξέρουμε ότι και U και $U+1$ είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Λόγω της συμμετρίας της εξίσωσης για να βρούμε μία λύση, μπορούμε να υποθέσουμε σε πρώτη προσέγγιση ότι U πρέπει να είναι της τάξης του συντελεστή του G^2 άρα 96 και πρέπει G να διαιρεί το γινόμενο $U(U+1)$. Καθώς 97 είναι πρώτος και δεν μπορεί να διαιρεθεί το 98 είναι καλός υποψήφιος. Έχουμε λοιπόν $97 \frac{98}{2}$ και μας αναγκάζει να πάρουμε 7 για το G . Βρίσκουμε λοιπόν $G=7$ και $U=97$. Με αποτέλεσμα $X = 4(2 \cdot 97 + 1)$ και $Y = 6(32 \cdot 7 + 1) + 1$ δηλαδή την λύση του Αρχιμήδη. $X = 780$ και $Y = 1351$.