Η μαθηματική λύση του Gödel στο πρόβλημα του Einstein

Ν. Λυγερός

Ένα από τα τρία αρχικά προβλήματα που έθεσε ο Albert Einstein στον Κωνσταντίνο Καραθεοδωρή στο πλαίσιο της Γενικής θεωρίας της Σχετικότητας μπορεί να εκφραστεί με τον εξής τρόπο. Οι εξισώσεις πεδίου μπορούν να έχουν λύσεις οι οποίες να έχουν κλειστές καμπύλες του τύπου χρόνου; Με άλλα λόγια το θέμα είναι αν ο φορμαλισμός επιτρέπει ή όχι αυτού του τύπου ανωμαλία, με την μαθηματική έννοια. Αν περιοριστούμε στη Φυσική και σε υπαρκτό μοντέλο, τότε η απάντηση δεν έχει δοθεί πειραματικά. Αν όμως εξετάσουμε αυτό το πρόβλημα καθαρά σε μαθηματικό πλαίσιο, δίχως φυσική ερμηνεία, τότε το σύμπαν του Gödel αποτελεί μία λύση. Πράγματι η μετρική που ανακάλυψε ο Gödel το 1949 είναι η λύση της εξίσωσης πεδίου του Einstein. Μάλιστα ο Gödel απαριθμεί έξι ιδιότητες του σύμπαντός του. Η ιδιότητα που μας αφορά είναι η έκτη στον κατάλογο του. Για να την αποδείξει κάνει χρήση της ιδιότητας της αξονικής συμμετρίας του σύμπαντος, την οποία αποδεικνύει με την αλλαγή μεταβλητών αναδεικνύοντας την κυλινδρική μορφή. Πιο συγκεκριμένα ο Gödel παίρνει την εξής μετρική.

$$\alpha^2({dx_0}^2 - {dx_1}^2 + (e^{2x1}/2){dx_2}^2 - {dx_3}^2 + 2e^{x1}dx_0dx_2)$$

Δείχνει ότι είναι δύο οι πίνακες των g_{ik} και g^{ik}, μετά υπολογίζει τα σύμβολα Christoffel, ύστερα τον τανυστή του Riemann και επαληθεύει την εξίσωση του Einstein.

Στη συνέχεια αποδεικνύει την συμμετρία του σύμπαντος ως προς τον άξονα 2 με την εξής αλλαγή μεταβλητών.

$$e^{x1} = ch2r + \cos\varphi \cdot sh2r$$

$$x_2e^{x1} = \sqrt{2}\sin\varphi \cdot sh2r$$

Και $tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{x-2t}{2\sqrt{2}}\right) = e^{-2r}tan\frac{\varphi}{2}$

Με βέβαια: $x_3 = 2y$

Με αυτόν τον τρόπο, η αρχική έκφραση γίνεται:

$$4a^2\left(dt^2 - dr^2 - dy^2 + (sh^4r - sh^2r)d\varphi^2 + 2\sqrt{2}sh^2rd\varphi dt\right)$$

Η συμμετρία είναι αυτονόητη, αφού το g_{ik} δεν εξαρτάται από την μεταβλητή φ.

Έστω $c = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$ τότε $shc = 1$

Άρα για κάθε $R > c$ έχουμε $sh^4 R - sh^2 R > 0$

Κατά συνέπεια ο κύκλος που καθορίζεται ως εξής $r = R$

$t = y = 0$ είναι παντού του τύπου χρόνου.

Συνεπώς η καμπύλη $r = R, y = 0$ και $t = -\alpha\varphi \ \ (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ για ένα α αρκετά μικρό θα είναι και αυτή του τύπου χρόνου. Όπως το αρχικό σημείο $(\varphi = 0)$ και το τελικό σημείο $(\varphi = 2\pi)$ βρίσκονται στη γραμμή τύπου χρόνου $r = R, y = \varphi = 0$ το τελικό προηγείται το αρχικό εάν $\alpha > 0$. Με τον ίδιο τρόπο προσεγγίζει κάθε σημείο που προηγείται το αρχικό σημείο. Και αυτό γίνεται σε κάθε σημείο, επειδή η λύση είναι ομοιογενής. Έτσι ο Gödel έλυσε το τρίτο πρόβλημα του Einstein, στο οποίο δεν είχε δώσει απάντηση ο Καραθεοδωρή.