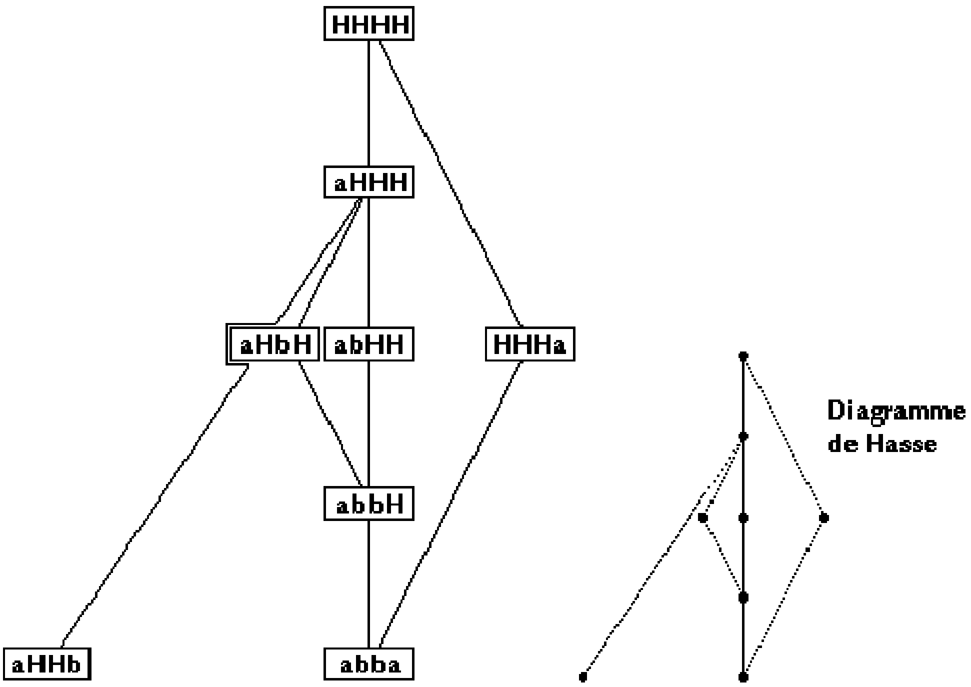
Sur le poset des hypergroupes d'ordre 2

N. Lygeros

A l'instar des hypergroupes qui permettent d'étudier la structure des schémas mentaux que nous utilisons dans la théorie des groupes et qui permettent d'établir la liste de ceux qui supportent cette généralisation, les hypergroupes H_v permettent de mettre en évidence via une propriété qui est fausse pour les hypergroupes, la structure du poset générée par cette propriété lorsque nous effectuons la restriction des hypergroupes H_v aux hypergroupes.

En effet nous pouvons considérer le poset des hypergroupes H_v puisqu'il existe une propriété qui s'appuie sur la faible associativité de ceux-ci. Examinons cette propriété. Pour cela considérons deux hypergroupes H_v $(H,.)$ et $(H,*)$ définis sur le même ensemble. Alors l'hyperopération $(.)$ est appelée <u>inférieure ou égale</u> à $(*)$ si et seulement s'il existe $f \in Aut(H,*)$ telle que $x.y \subseteq f(x*y)$ pour tous les couples (x,y) dans H. Une conséquence basique de cette définition c'est que toute opération plus grande que celle d'un hypergroupe H_v définit un hypergroupe H_v.
Aussi nous avons une construction naturelle du poset des hypergroupes H_v. Et comme les hypergroupes au sens de Marty sont inclus dans les hypergroupes H_v nous pouvons considérer le sous-poset du poset initial même si la propriété n'est pas héréditaire dans ce cas. Pour les hypergroupes d'ordre 2 nous avons le poset suivant :



En termes de poset sa longueur est maximale puisque les 4 H de l'hypergroupe complet sont tous décomposés jusqu'à atteindre l'hypergroupe isomorphe au groupe cyclique $Z/2Z$. Il est donc de même longueur que le poset des hypergroupes H_v. Cela provient entre autres du fait que l'hypergroupe complet est maximal et le groupe minimal pour les deux posets.

Par ailleurs, le diagramme de Hasse du poset des hypergroupes met en évidence la différence fondamentale qui existe entre la cyclicité et la projectivité puisque l'hypergroupe projectif en tant qu’atome incomparable au groupe cyclique n’appartient pas à la chaîne maximale. Quant à la non commutativité, elle est bien visible puisque les deux hypergroupes non commutatifs sont situés symétriquement sur la chaîne maximale, au même niveau pour l’ensemble du poset ce qui explique l’ordre de son groupe d’automorphismes. Ainsi nous voyons que le poset des hypergroupes au sens de Marty via le poset des hypergroupes H_v, permet de visualiser des propriétés qui caractérisent les hypergroupes sans nécessairement passer par la nature intrinsèque de ceux-ci. Le poset en tant que structure combinatoire simple conserve via son squelette une information sur les relations entre hypergroupes et non seulement les hypergroupes.