Remarques sur les hypergroupes renaissants au sens de Mittas

N. Lygeros

<u>Définition :</u> [J. Mittas] On dit qu'une hyperopération $x.y$ définie sur un ensemble H, que nous supposons encore associative, vérifie la propriété de la <u>renaissance</u> si pour tout $x \in H$, il existe un n tel que $x^n = H$.

<u>Proposition :</u> [J. Mittas] Dans tout demi-hypergroupe la propriété de la renaissance entraîne la reproductivité et, par conséquent, le demi-hypergroupe est un hypergroupe, appelé <u>hypergroupe renaissant</u>.

C'est ainsi que Jean Mittas a introduit pour la première fois en 1984, la notion d'hypergroupes renaissants qui constituent une catégorie spécifique des hypergroupes single-power. Il a aussi défini la hauteur et le gradient de la manière suivante :

Le plus petit $n = h \in \mathbb{N}$ pour lequel on a $A^n = H$ est dit <u>hauteur</u> du sous-ensemble non vide A de H et on la note $[A]$. Si $A = \{x\}$, h est appelé hauteur de l'élément x et on pose $[x] = h$. Si $A = \varnothing$ on pose par définition $[\varnothing] = \infty$.

Le plus petit entier naturel $g > 1$ tel que $A \subset A^g$ est dit <u>grade</u> du sous-ensemble $A \neq \varnothing$ et de H et on note $g = (A)$. Si $A = \{x\}$, g est appelé grade de x et l'expression $A \subset A^g$ équivaut évidemment à $x \in x^g$. Si $A = \varnothing$ ou H, on pose par définition $(A) = 1$.

De ce formalisme, Jean Mittas a déduit le théorème de caractérisation des hypergroupes renaissants.

<u>Théorème :</u> [J. Mittas] Pour qu'un hypergroupe $(H,.)$ soit renaissant il faut et il suffit que :

1) H n'inclue pas de parties stables.
2) Toute chaîne de la forme $A \subset A^2 \subset A^3 \subset ....$ extraite de H soit de longueur finie.

En exploitant cette caractérisation de Mittas et la classification de Vougiouklis des hypergroupes d'ordre 2

$$H_1 = (a,b,b,a), \quad H_2 = (a,b,b,H), \quad H_3 = (a,b,H,H), \quad H_4 = (a,H,b,H)$$
$$H_5 = (a,H,H,b), \quad H_6 = (H,H,H,a), \quad H_7 = (b,H,H,H), \quad H_8 = (H,H,H,H)$$

nous en déduisons que les hypergroupes H_1 à H_6 ne sont pas renaissants car ils ont un élément projectif et donc une partie stable. Les hypergroupes H_7 et H_8 sont renaissants car pour le premier comme $b^2 = H$ on a $a^4 = b^2 = H$ et pour le second $a^2 = b^2 = H$.

Nous pouvons retrouver directement ce résultat sans faire appel à la classification. En effet, en excluant la projectivité, nous avons $a^2 = b$ ou H et $b^2 = a$ ou H i.e. 4 configurations possibles. La configuration scalaire engendre une stabilité à l'ordre 4 ; elle est donc exclue.

Les configurations croisées se ramènent à l'hypergroupe (b, H, H, H) ou (H, H, H, a). Et la configuration complète s'identifie à l'hypergroupe complet (H, H, H, H).

En exploitant la caractérisation de Mittas et la classification de Bayon-Lygeros des hypergroupes à l'ordre 3 via le partitionnement des groupes d'automorphismes nous avons le résultat suivant :

Théorème : Il n'existe que 2827 hypergroupes renaissants à l'ordre 3.

Plus explicitement nous avons : 4 hypergroupes renaissants rigides (4 parmi les 6 hypergroupes rigides puisque deux sont projectifs), 9 hypergroupes renaissants dont le groupe d'automorphismes est d'ordre 2, 131 hypergroupes renaissants dont le groupe d'automorphismes est d'ordre 3 et enfin 2683 hypergroupes renaissants dont le groupe d'automorphismes est d'ordre 6.