Remarques sur les hypergroupes canoniques au sens de Mittas

N. Lygeros

L'introduction des hypergroupes canoniques par Jean Mittas ne s'est pas effectuée de manière linéaire. En effet elle a été précédée des notions d'hypercorps et d'hypercorps valué créés en 1956 par Marc Krasner. Ce dernier a aussi élaboré la notion d'hyperanneau en 1966. Le point de vue de Jean Mittas fut autre. Connaissant l'existence de la notion d'hypergroupes au sens de Marty, il a réalisé que la restriction à la structure additive de la notion d'hypercorps ou d'hyperanneau se ramenait à considérer une classe spéciale d'hypergroupes et c'est cette classe qu'il a dénommée hypergroupes canoniqueset qu'il a notée additivement. Ces derniers peuvent désormais être définis de la manière suivante selon une axiomatique classique :

1. Associativité : $(x+y)+z=x+(y+z)$
2. Commutativité : $x+y=y+x$
3. Neutralité : Il existe un $0\in H$ tel que, pour tout $x\in H$, on ait $x+0=x$ (un tel élément est évidemment unique et on va l'appeler zéro de *H*).
4. Opposition : Pour tout $x\in H$, il existe un et un seul $x'\in H$ tel que, $0\in x+x'$ [un tel x' sera noté aussi $-x$ et dit l'opposé de *x*, et on posera $x-y=x+(-y)$].
5. Réciprocité : $z\in x+y\Rightarrow y\in z-x$.

De ces axiomes, Jean Mittas a pu montrer de manière élémentaire que les ensembles de sous-hypergroupes de *H* qui sont inversibles, clos, canoniques et contenant le zéro de *H* coïncident. Cela permet aussi de montrer que si *R* est une relation d'équivalence normale dans *H*, l'ensemble des classes H/R est un hypergroupe canonique.

En exploitant cette caractérisation de Mittas et la classification de Vougiouklis des hypergroupes d'ordre 2

$$H_1=(a,b,b,a),\quad H_2=(a,b,b,H),\quad H_3=(a,b,H,H),\quad H_4=(a,H,b,H)$$
$$H_5=(a,H,H,b),\quad H_6=(a,H,H,H),\quad H_7=(b,H,H,H),\quad H_8=(H,H,H,H)$$

nous en déduisons que les hypergroupes H_3 et H_4 ne sont pas canoniques car ils ne sont pas commutatifs. Idem pour les hypergroupes H_5, H_6, H_7 et H_8 car ils n'ont pas d'élément neutre. Et avec les axiomes d'opposition et de réciprocité nous pouvons vérifier que H_1 et H_2 sont canoniques. Ainsi les hypergroupes canoniques à l'ordre 2, ce sont le groupe cyclique et l'hypergroupe H_2.

Pour retrouver directement ce résultat sans faire appel à la classification, nous considérons la table de Cayley en imposant les contraintes de commutativité et de neutralité et nous n'avons à déterminer que le produit b^2 qui doit nécessairement être différent de b pour respecter les axiomes d'opposition et de réciprocité.

En exploitant la caractérisation de Mittas et la classification de Bayon-Lygeros des hypergroupes à l'ordre 3, nous obtenons 37 hypergroupes avec élément neutre dont 28 sont abéliens.

Parmi ces 28 hypergroupes abéliens avec élément neutre, nous trouvons 10 candidats qui vérifient les axiomes d'opposition et de réciprocité.

Théorème : Il n'existe que 10 hypergroupes canoniques à l'ordre 3.

H_1 =	a b c	b c a	c a b
H_2 =	a b c	b ac b	c b a
H_3 =	a b c	b ab c	c c ab
H_4 =	a b c	b ac bc	c bc ab
H_5 =	a b c	b H b	c b a
H_6 =	a b c	b H b	c b ac
H_7 =	a b c	b H bc	c bc ab
H_8 =	a b c	b b H	c H c
H_9 =	a b c	b bc H	c H bc
H_{10} =	a b c	b H bc	c bc H