Remarques sur les hypergroupes très fins

R. Bayon et N. Lygeros

Dans le cadre de la généralisation des hypergroupes au sens de Marty, Vougiouklis a introduit la notion d'hyperstructure qu'il a nommée H_v-structure et qui constitue la généralisation des hyperstructures algébriques comme les hypergroupes et les hyperanneaux. Un cas particulier de cette généralisation, c'est celui d'hyperstructure très fine. Plus explicitement une H_v-structure s'appelle très fine si toutes ses hyperopérations sont uniformes, sauf une et une seule ; dont aussi tous les produits sont des singletons, sauf un seul produit, qui est un sous-ensemble non vide. Avec Konguetsof et Spartalis, Vougiouklis a établi la proposition suivante.

Soit $(H,.)$ un H_v-groupe fini très fin de cardinalité $n>1$. Soient *a* et *b* les seuls éléments de *H* tels que $ab=A$ soit de cardinalité strictement supérieure à 1.

i) ou bien pour tout υ de $H\setminus\{a\}$, $\upsilon a=a$; et deux cas sont à considérer :
si $n=2$, alors il existe une loi de groupe, $(*)$, sur *H,* telle que $a*b\in A$ et $x*y=xy$ pour tous *x, y* de $H\setminus\{(a,b)\}$,
si $n\geq 3$, alors $a=b, H\setminus\{a\}$ est un groupe, $A=H$ ou $A=H\setminus\{a\}$,

ii) ou bien il existe υ de *H* tel que $\upsilon\neq a$ et $\upsilon a\neq a$, alors il existe une loi de groupe $(*)$ presque associative sur *H* i.e. l'associativité se vérifie partout, sauf éventuellement pour les triplets d'éléments où se présente le produit $a*b$, telle que $a*b\in A$ et $x*y=xy$ pour tous *x, y* de $H\setminus\{(a,b)\}$.

Ainsi si nous désirons caractériser les hypergroupes très fins il suffit de considérer la première partie de la proposition.

A présent, si nous considérons le poset des H_v-groupes et sa restriction, le poset des hypergroupes, nous pouvons examiner la maximalité de la chaîne maximale de chacun d'entre eux. Pour $n=2$, nous avons établi que les chaînes maximales ont même longueur puisque la chaîne maximale du poset des hypergroupes qui est inclus dans le poset des H_v-groupes est maximale i.e. 2.2^2+1. En d'autres termes, elle débute avec le groupe cyclique et aboutit à l'hypergroupe complet.

Ensuite nous remarquons que si la chaîne maximale du poset des hypergroupes a la propriété de maximalité alors elle doit traverser les hypergroupes très fins.

Pour $n=3$, avec la caractérisation Konguetsof-Spartalis-Vougiouklis, nous obtenons deux hypergroupes très fins : $HF_1=a,b,c,b,ac,b,c,b,a$ et $HF_2=a,b,c,b,H,b,c,b,a$ et nous remarquons que l'hyperopération de HF_1 est incluse dans l'hyperopération de HF_2. De plus par la classification de Bayon-Lygeros des hypergroupes d'ordre 3 nous n'avons que 7 hypergroupes minimaux dont HF_1. Et comme HF_2 a un produit à 3 termes, nous en déduisons que la chaîne maximale n'a pas la propriété de maximalité.

Pour $n \geq 4$, via la caractérisation, nous avons que $A = H$ donc $|A| \geq 4$ ou $A = H \setminus \{a\}$ donc $|A| \geq 3$. Dans tous les cas A n'est pas de cardinalité *2*. Par conséquent, nous n'avons pas la propriété de maximalité. Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème **[Bayon-Lygeros]** Pour $n \geq 3$, la chaîne maximale du poset des hypergroupes n'a pas la propriété de maximalité.