Propriétés des soushypergroupes des hypergroupes très fins

N. Lygeros

Nous rappelons qu'un hypergroupe $\langle H,.\rangle$ au sens de Marty qui vérifie l'associativité et l'axiome de reproduction est dit très fin s'il existe un et un seul hyperproduit qui ne soit pas un singleton et que tous les autres le soient. Dans ce cas, il existe un élément x de H tel que $\left(H-\{x\},.\right)$ soit un groupe et $xh = hx = x$ pour tout $h \neq x$ ainsi que $x.x = H - \{x\}$ ou $x.x = H$.

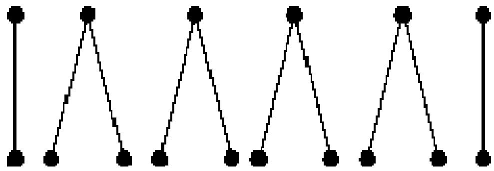
Si $x.x = H - \{x\}$, selon la terminologie de Vougiouklis nous dirons que $\langle H,.\rangle$ est un hypergroupe très fin de première espèce et si $x.x = H$ alors $\langle H,.\rangle$ est un hypergroupe très fin de seconde espèce. De plus, selon la terminologie de Krasner et Sureau, nous dirons qu'un soushypergroupe U de M est clos dans M si $(M-U)U = U(M-U) = (M-U)$ et ultra-clos si $zU \bigcap z(M-U) = \varnothing = Uz \bigcap (M-U)z$. Alors après avoir remarqué que tous les soushypergroupes propres d'un hypergroupe très fin sont des groupes, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

<u>**Proposition**</u> **(Vougiouklis)** Soit H un hypergroupe très fin avec x tel que $|x.x| > 1$.
(i) Tout soushypergroupe de H est clos dans H .
(ii) Le seul soushypergroupe de H qui soit ultra-clos, c'est le groupe $H-\{x\}$ si H est de première espèce.

A partir de ce résultat nous pouvons retrouver par analogie l'idée de recouvrement d'hyperopérations qui permet de construire par hérédité le poset des hypergroupes H_v et par restriction celui des hypergroupes au sens de Marty. Ainsi même si nous ne disposons plus du théorème de Lagrange dans les hypergroupes puisque de manière générale l'ordre du sous-groupe ne divise pas l'ordre du groupe en raison de la dégénérescence de la notion d'orbite classique, nous avons via les relations qui décrivent le poset, un moyen puissant pour classifier ces structures. Dans le cas extrême des hypergroupes très fins nous retrouvons les groupes lorsque nous passons aux soushypergroupes propres. Cette propriété confirme que la généralisation est uniforme et qu'elle transfère correctement l'assemblage des notions nécessaires pour maîtriser la complexité du passage des groupes aux hypergroupes. C'est en ce sens que nous interprétons les hypergroupes très fins comme une étape intermédiaire. En effet, ils constituent la première couche d'hypergroupes qui englobent les groupes.

Dans le cas précis des hypergroupes d'ordre 3, nous remarquons que les deux hypergroupes très fins qui sont toujours comparables se trouvent à la base du poset. Cependant pour mieux comprendre leur position, il est plus judicieux de les inclure dans l'ensemble des hypergroupes H_v très fins. Ce dernier est constitué de 16 éléments qui s'organisent de la manière suivante sous forme de poset.

Diagramme de Hasse



Liste

a b c	b ac b	c b a
ac a b	a b c	b c a
bc a b	a b c	b c a
c ab b	a b c	b c a
c ac b	a b c	b c a
c a ab	a b c	b c a
c a bc	a b c	b c a
c a b	ab b c	b c a
c a b	ac b c	b c a
c a b	a ab c	b c a
a b c	b H b	c b a
H a b	a b c	b c a
c H b	a b c	b c a
c a H	a b c	b c a
c a b	H b c	b c a
c a b	a H c	b c a