Hypergroupes et groupes d'automorphismes

N. Lygeros

Une manière puissante d'aborder les groupes au sens de Marty (associativité forte) ou au sens de Vougiouklis (associativité faible) qui sont des généralisations successives de la notion de groupe, c'est de les examiner via leur groupe d'automorphismes. Cette dernière notion dont le caractère classifiant est fort permet de les distinguer de manière intrinsèque. De plus en croisant l'information obtenue avec la nature de l'hypergroupe, nous parvenons à une partition très fine de ces derniers. Ainsi pour les hypergroupes d'ordre 2, d'après la classification de Vougiouklis nous avons 2 hypergroupes dont le groupe d'automorphismes est d'ordre 1 et 4 hypergroupes dont le groupe d'automorphismes est d'ordre 2. Nous voyons ainsi que même dans le cas le plus simple, la notion de groupes d'automorphismes permet de faire une distinction. De même pour les hypergroupes d'ordre 3, d'après la classification de Bayon-Lygeros nous avons respectivement 6, 10, 244 et 3739 hypergroupes dont le groupe d'automorphismes est d'ordre 1, 2, 3 et 6 respectivement. Cependant la notion de groupe d'automorphismes peut aussi servir à partitionner les hypergroupes dans un cadre totalement différent qui est celui de l'énumération en fonction du nombre d'occurrences de la totalité de l'hypergroupe dans les hyperproduits. Pour les hypergroupes d'ordre 2 nous avons les résultats suivants :

		0	1	2	3	4
Aut(H)	1	-	-	1	-	1
	2	1	1	2	2	-
Total		1	1	3	2	1

Et pour les hypergroupes d'ordre 3 nous avons les résultats suivants :

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Aut(H)	1	2	-	-	1	-	-	2	-	-	1
	2	1	-	-	5	-	-	4	-	-	-
	3	12	11	46	36	61	41	22	13	2	-
	6	12	58	317	819	1143	921	386	77	6	-
Total		27	69	363	861	1204	962	414	90	8	1

De cette manière nous pouvons remarquer que la fonction qui représente le nombre d'hypergroupes selon le nombre de H dans les hyperproduits est unimodale (au moins jusqu'à cet ordre) mais que ce n'est pas le cas si nous nous restreignons aux hypergroupes dont le groupe d'automorphismes est d'ordre 3. Ainsi dans la masse exponentielle des hypergroupes, la notion de groupe d'automorphismes permet de faire des distinctions et de déterminer certaines propriétés comme la rigidité, la divisibilité ou encore le caractère abélien alors que ces informations seraient inaccessibles sans cette intervention. C'est pour cette raison que nous considérons que les groupes revivent dans les hypergroupes à travers leur groupe d'automorphismes. Même généralisé, le groupe continue à jouer un rôle fondamental.