**Sur le nombre d'hypergroupes hypocomplets**

N. Lygeros

**<u>Définition :</u>** Une hyperopération sera dite <u>complète</u> lorsque son produit est égal à l'hypergroupe sur lequel elle est définie.

**<u>Définition :</u>** Un hypergroupe (au sens de Marty) sera dit <u>hypocomplet</u> lorsque toutes ses hyperopérations à l'excepté d'une seule, sont complètes.

**<u>Proposition :</u>** La structure définie par $a \perp a = s \neq H$ et $\forall (x, y) \in H^2 \neq (a, a)$ $x \perp y = H$ est un hypergroupe hypocomplet abélien.

**<u>Démonstration :</u>**

- La structure est abélienne par définition puisque l'unique produit différent des autres est un carré.
- La structure vérifie l'axiome de reproduction puisqu'il existe toujours un *H* dans chaque colonne et dans chaque ligne de sa table.
- La structure est associative car :

• $a \perp (a \perp a) = s = (a \perp a) \perp a$
• $x \perp (y \perp z) = x \perp H = H = H \perp z = (x \perp y) \perp z$ pour $x, y, z \neq a$
• $a \perp (y \perp z) = a \perp H = H = H \perp z = (a \perp y) \perp z$ pour $y, z \neq a$
• $x \perp (y \perp a) = x \perp H = H = H \perp a = (x \perp y) \perp a$ pour $x, y \neq a$ .

- La structure est un hypergroupe et elle est donc hypocomplète.

**<u>Théorème :</u>** Le nombre d'hypergroupes hypocomplets abéliens *H* est égal à $2(n-1)$ à isomorphie près pour $|H| = n$ .

**<u>Démonstration :</u>** Par récurrence.

**<u>Proposition :</u>** La structure définie par $a \perp b = s \neq H$ et $s \neq a$ ou $s \neq b$, et $\forall (x, y) \in H^2 \neq (a, b)$ $x \perp y = H$ est un hypergroupe hypocomplet non abélien.

**<u>Démonstration :</u>**

- La structure est non abélienne par définition puisque $a \perp b = s \neq H = b \perp a$
- La structure vérifie l'axiome de reproduction pour la même raison que la proposition précédente.
- La structure est associative car :

• $a \perp (a \perp a) = H = (a \perp a) \perp a$ $\qquad$ $b \perp (b \perp b) = H = (b \perp b) \perp b$
• $x \perp (y \perp z) = x \perp H = H = H \perp z = (x \perp y) \perp z$ pour $x, y, z \neq a, b$

- pour un seul *a* ou *b* dans *x, y, z* voir proposition précédente.
- $a \perp (b \perp z) = a \perp H = H = s \perp z = (a \perp b) \perp z$ idem pour les permutés
- $a \perp (y \perp b) = a \perp H = H = H \perp b = (a \perp y) \perp b$ idem pour les permutés
- $a \perp (b \perp a) = a \perp H = H = s \perp a = (a \perp b) \perp a$
- $a \perp (a \perp b) = a \perp s = H = H \perp b = (a \perp a) \perp b$

**Remarque :** Si $a \perp b = a$ la structure n'est pas associative car $(a \perp b) \perp b = a \perp b = a \neq H = a \perp H = a \perp (b \perp b)$

Si $a \perp b = b$ la structure n'est pas associative car $(a \perp a) \perp b = H \perp b = H \neq b = a \perp b = a \perp (a \perp b)$

**Théorème :** Le nombre d'hypergroupes hypocomplets non abéliens est égal à $4(n-2)$ à isomorphie près pour $|H| = n$.

**Démonstration :** Par récurrence.

**Théorème :** Le nombre d'hypergroupes hypocomplets est égal à $6n - 10$ à isomorphie près pour $|H| = n$.