Remarques sur les hypergroupes polysymétriques au sens de Mittas

N. Lygeros

L'introduction de la notion d'hypergroupes polysymétriques par Jean Mittas s'est effectuée de manière naturelle à partir de la notion d'hypergroupes canoniques. Car même s'il a exploité l'ensemble des racines $n^{\text{ième}}$ de $x^n + y^n$ dans un corps commutatif algébriquement clos pour définir le premier hypergroupe de cette forme, en examinant son approche axiomatique ultérieure nous ne pouvons manquer de voir le substrat canonique. Quant au terme polysymétrique, il indique la pluralité du symétrique.

Définition [J. Mittas] Un hypergroupe sera dit polysymétrique s'il vérifie les axiomes suivants :

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$
2. $x+y = y+x$
3. $(\exists o \in H)[x \in o+x]$
4. $(\forall x \in H)(\exists x' \in H)[x+x' = o]$

On appellera le symétrique de $x \in H$ l'ensemble $S(x) = \{x' \in H, x+x' = o\}$

5.Si $z \in x+y$ et si $x' \in S(x), y' \in S(y), z' \in S(z)$ on a : $z' \in x'+y'$

Grâce à cette axiomatique, Jean Mittas a réussi à montrer la relation étroite qui lie cette famille d'hypergroupes aux groupes abéliens.

Théorème[J.Mittas] Les ensembles $C(x) = o+x$, où x parcourt H, forment une partition de H et on a $x+y = o+x+y = (o+x)+(o+y)$.

En plus, pour tout $x, y \in H, x+y$ est une des classes de la partition et l'ensemble $G = \{C(x), x \in H\}$ de ces classes est un groupe abélien par rapport à l'opération $C(x)$ et $C(y)$.

Cela permet de montrer que l'on peut attacher des structures comme les groupes à un ensemble donné d'hypergroupes même si le cas traité par Jean Mittas n'est pas générique. À partir de la classification de Vougiouklis des hypergroupes d'ordre 2, nous pouvons déterminer les hypergroupes polysymétriques d'ordre 2

De la même manière, à partir de la classification de Bayon-Lygeros des hypergroupes d'ordre 3, nous pouvons déterminer les hypergroupes polysymétriques d'ordre 3.