Sur la stabilisation de la notion de conjugaison dans les hypergroupes

N. Lygeros

Bien que la notion de conjugaison soit évidente pour les groupes, il a fallu la contribution de nombreux chercheurs avant qu'elle devienne naturelle pour les hypergroupes. Cette note a pour but de décrire l'évolution de sa stabilisation.

La première tentative de définir la notion de conjugaison dans le domaine des hypergroupes s'est effectuée peu de temps après la création de la notion d'hypergroupe par Marty en 1934. En 1937, Wall introduit une notion naturelle de conjugaison pour les hypergroupes à unité scalaire e et dont l'ensemble des scalaires δ est un groupe Δ. Pour cela il considère tous les sous-hypergroupes $\delta h \delta^{-1}$ (δ dans Δ) conjugués de h. Cette classe d'hypergroupes est extrêmement réduite par définition et exploite le plus possible les propriétés des groupes de manière à les étendre suffisamment pour établir une première généralisation.

Dans le cadre de cette approche, en 1938, Dresher et Ore ont montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour un hypergroupe H ayant des unités à droite et à gauche et tel que tout élément admet un inverse à droite et un inverse à gauche, soit homomorphe à un groupe G est que H contienne un sous-hypergroupe h strictement invariant tel que H/h soit isomorphe à G. Cette fois, ce n'est plus simplement la notion de groupe qui est exploitée mais celle de sous-hypergroupe qui permet d'annuler les effets de la généralisation de l'hypergroupe et de ramener la structure à celle d'un groupe.

En 1940, c'est au tour de Krasner de prendre cette idée en main et de l'étendre grâce à un théorème sur les sous-hypergroupes infra-invariants et tels que le quotient central de H par un sous-hypergroupe h soit un groupe.

Cependant il faudra attendre l'apport de Sureau en 1977 pour voir naître la notion de conjugaison dans les hypergroupes au sens le plus général du terme puisque l'existence d'unités ou d'inverses n'est plus supposée. Ainsi c'est la notion d'hypergroupe de Marty sans aucune restriction qui est capable de supporter la notion générale de conjugaison. Pour effectuer cette stabilisation de la conjugaison dans les hypergroupes, Sureau passe par l'intermédiaire de la clôture. Si h_2 est clos dans H et si $h_1 \cap h_2$ est non vide, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall a$ élément de $h_1, \exists a'$ élément de $h_1 / a'a \subset h_1 \cap h_2$;

(ii) $\forall a$ élément de $h_1, \forall b$ élément de h_1 nous avons $ab \subset h_1 \cap h_2$ ou $ab \subset h_1 - (h_1 \cap h_2)$;

(iii) $\forall a$ élément de $h_1, \exists a''$ élément de $h_1 / aa'' \subset h_1 \cap h_2$.

Si h_1 et h_2 satisfont à ces conditions équivalentes, h_2 est dit h_1-conjugable.

Si h_2 est h_1-conjugable, alors, pour tout a de h_1 et tous a' et a'' de h_1 tels que $a'a \subset h_1 \cap h_2$ et $aa'' \subset h_1 \cap h_2$, aha' et $a''ha$ sont des sous-hypergroupes h_1-conjugables (et donc clos) de H.

C'est ainsi que s'est achevée la stabilisation de la notion de conjugaison dans les hypergroupes au sens de Marty.