Sur les hypergroupes induits au sens de Sureau

N. Lygeros

Historiquement la notion d'hypergroupe induit provient d'une étude sur les demi-hypergroupes menée par M. Krasner et P. Lecomte. Dans cette étude les deux auteurs se sont intéressés à l'application $q : H \to \mathscr{P}(H)$ qui vérifie pour tout coupe $(x,\ y)$ d'éléments de H les trois propriétés suivantes :

1) $x \in q(x)$
2) $q(q(x)) = q(x)$
3) $q(\ q(x)\ q(y)) = q(x)\ q(y)$

Et leur résultat principal c'est que $(q(H), \cdot\ )$ est un hypergroupe.

Cependant si nous nous restreignons à l'ensemble des hypergroupes, Y. Sureau a exhibé des cas relativement simples où les premières conditions n'étaient pas vérifiées alors que $(q(H), \cdot\ )$ demeure tout de même un hypergroupe.

Premier cas. $H = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ et
$h = \{a\}$ $\quad q(x) = xh$
$q(a) = ah = \{a\} = q(b)$
$q(c) = ch = H - d$
$q(d) = dh = H - c$

	a	b	c	d
a	a	a	$H - d$	$H - c$
b	a	a	$H - d$	$H - c$
c	$H - d$	$H - d$	$H - d$	c, d
d	$H - c$	$H - c$	c, d	$H - c$

Nous obtenons donc la table suivante:

	$q(a)$	$q(c)$	$q(d)$
$q(a)$	$q(a)$	$q(a), q(c)$	$q(a), q(d)$
$q(c)$	$q(a), q(c)$	$q(a), q(c)$	$q(H)$
$q(d)$	$q(a), q(d)$	$q(H)$	$q(a), q(d)$

Nous avons donc $(q(H), \cdot\ )$ qui est un hypergroupe mais aussi $b \notin q(b) = \{a\}$

Second cas :

Et si nous choisissons $q(a) = \{a, c, d\} = q(b)$ et $q(c) = q(d) = q(H)$ alors de nouveau $(q(H), \cdot\ )$ est un hypergroupe mais ni la première condition ni la seconde ne sont vérifiées. Guidé par ce type d'exemples non couverts par le résultat de M. Krasner et P. Lecomte, Y. Sureau a établi le théorème suivant :

<u>Théorème</u> (Y. Sureau) Soit $q : H \to \mathscr{P}^*(H)$ une application de H dans l'ensemble des parties non vides de H et soit « $\cdot$ » l'hypergroupe induit sur $q(H)$

(1) Si, $\forall (x, y) \in H^2,\ \ q(x)\cdot\ q(y) = q(q(x)q(y)) = q(x)q(y)$ (resp. $q(xy)$) alors « $\cdot$ » est associatif dans $q(H)$; on dira dans ce cas que q est congruente (resp. régulière) sur H.

(2) Si $H = \{x \in q(a)\ ;\ a \in H\} = \bigcup_{a \in H} q(a)$, alors « $\cdot$ » est reproductible dans $q(H)$; on dira dans ce cas que q est reproductible.

Ce théorème est donc plus général puisqu'il englobe les cas précédents mais il nous dit quelque chose de plus. En effet il n'est complet que sous ses conditions, il semble donc nécessaire d'examiner exhaustivement lorsque cela est possible s'il recouvre tous les hypergroupes possibles afin de justifier ou d'étendre les conditions proposées.