Οι αριθμοί LR(p,n)

Ν. Λυγερός και O. Rozier

Μελετούμε τους περιττούς πρώτους αριθμούς της συνάρτησης $\tau(n)$ του Ramanujan που αποτελούν ένα λεπτό σύνολο μεγάλων πρώτων αριθμών. Με αυτόν τον στόχο, ορίζουμε $LR(p,n) := \tau(p^{n-1})$ και δείχνουμε ότι οι περιττοί πρώτοι αριθμοί είναι της μορφής $LR(p,q)$, όπου p και q είναι περιττοί πρώτοι αριθμοί. Στη συνέχεια αναδεικνύουμε αριθμητικές ιδιότητες και ισοδυναμίες των αριθμών LR κάνοντας χρήση πιο γενικών αποτελεσμάτων των ακολουθιών του Lucas. Τελικά, προτείνουμε εκτιμήσεις και συζητούμε περί ψηφιακών αποτελεσμάτων των ζευγαριών (p,q) για τα οποία οι αριθμοί $LR(p,q)$ είναι πρώτοι. Επειδή η αρχική συνάρτηση είναι του Ramanujan και ο Lehmer είναι αυτός που βρήκε το πρώτο παράδειγμα πρώτου αριθμού τέτοιας μορφής, αποφασίσαμε να τους ονομάσουμε LR προς τιμή τους. Το πρώτο μας θεώρημα αφορά στον χαρακτηρισμό των αριθμών LR. Έστω n ένας φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε ο αριθμός $\tau(n)$ να είναι πρώτος. Τότε $n = (p^{q-1})$, όπου p και q είναι περιττοί πρώτοι αριθμοί και ο p είναι κοινός. Προς το παρόν γνωρίζουμε μόνο ένα μικρό πεπερασμένο σύνολο πρώτων αριθμών μη κοινών. Είναι οι αριθμοί: 2, 3, 5, 7, 2411, 7758337633. Τον τελευταίο τον ανακαλύψαμε το 2010. Εκτιμούμε ότι αυτοί οι αριθμοί είναι οι μικρότεροι ενός πολύ λεπτού συνόλου, άπειρο σε πλήθος. Αναφερόμαστε σε αυτούς τους αριθμούς και ως υπεριδιόμορφοι πρώτοι αριθμοί. Έστω p περιττός πρώτος. Μπορούμε να συνδυάσουμε τους αριθμούς $LR(p,n)$ μέσω των ακολουθιών του Lucas και να αποδείξουμε ότι αν m διαιρεί n τότε $LR(p,m)$ διαιρεί $LR(p,n)$. μέσω της χρήσης του θεωρήματος των Murty, Murty και Shorey, αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση $\tau(n) = \pm 1$ δεν έχει λύση για $n > 1$. Μέσω της θεωρίας των ακολουθιών του Lucas έχουμε τις εξής αριθμητικές ιδιότητες:

$LR(p,m) \wedge LR(p,n) = LR(p, m \wedge n)$

$LR(p,q) = \left(\frac{Dp}{q}\right)\ [q]$

$LR(p,2n+1) = LR(p,n+1)^2 - p^{11} LR(p,n)^2$

Όπου Dp είναι η διακρίνουσα: $\tau(p)^2 - 4p^{11}$

Με αυτές αποδεικνύουμε το επόμενο θεώρημα. Έστω p και q δύο περιττοί πρώτοι αριθμοί και p κοινός. Εάν d είναι ένας πρώτος διαιρέτης του αριθμού $LR(p,q)$, τότε $d = \pm 1[2q]$ ή $d = q$. Επιπλέον εάν q διαιρεί τον αριθμό $LR(p,q)$ εάν και μόνο εάν q διαιρεί τον αριθμό Dp. Με αυτόν τον τρόπο αποδεικνύουμε και το επόμενο θεώρημα. Έστω p ένας κοινός περιττός πρώτος αριθμός. Εάν $p = 1[4]$, τότε ο αριθμός $LR(p,p)$ είναι σύνθετος. Εάν $p \equiv 3[4]$ και d ένας πρώτος διαιρέτης του αριθμού $LR(p,p)$, τότε $d = \pm 1[4p]$. Μπορούμε λοιπόν να κάνουμε θεωρητικές εκτιμήσεις για την πιθανότητα εύρεσης ενός πρώτου αριθμού του τύπου LR κι έχουμε το εξής αποτέλεσμα για $p_{max} \gg 1$ και $q_{max} \gg 1$. Η αναμενόμενη τιμή του πλήθους των πρώτων αριθμών αυτής της μορφής είναι για p πρώτο αριθμό και $q < q_{max}$

$$\frac{2e^{\gamma} \log q_{max}}{11 \log p}$$

Κατά συνέπεια σε γενικό πλαίσιο για $LR(p, q)$ με $p < p_{max}$ και $q < q_{max}$ έχουμε

$$\frac{2e^{\gamma} p_{max} \log q_{max}}{11(\log p_{max})^2}$$