Questions de Koskas sur les demi-hypergroupes et les hypergroupes

N. Lygeros

Maurice Koskas, dans son article intitulé : *Groupoïdes, demi-hypergroupes et hypergroupes* (J. Math. Pures et appliquées 49, pp 155-192, 1970), construit une théorie des demi-hypergroupes et hypergroupes qui utilise des concepts de la théorie des demi-groupes. D'une certaine manière, il effectue une complétion formelle de la théorie des hypergroupes car celle-ci s'est développée à travers les travaux de F. Marty, M. Dresher, O. Ore, M. Krasner et J. Kuntzmann i. e. à une époque antérieure au développement de la théorie des demi-groupes. De plus, il établit un foncteur de la catégorie des hypergroupes dans celle des groupes. Ainsi il manipule ce foncteur comme un transfert de structure. Dans ce sens, il ramène l'étude des hypergroupes à celle des groupes. Cette approche somme toute classique se justifie par la période de l'écriture de son article. Néanmoins, désormais la mentation initiale de F. Marty prédomine à nouveau et nous considérons las hypergroupes comme des entités à part entière.

Dans le cadre de cette étude, il a été amené à redémontrer le théorème de F. Marty, à savoir que tout hypergroupe simplifiable d'un côté est un groupe. À la suite de sa démonstration il écrit ceci : (page 177) « Notons que nous ne connaissons pas de demi-hypergroupe simplifiable d'un côté qui ne soit pas un demi-groupe. Il nous paraît probable cependant qu'il en existe effectivement. »

Plus loin dans son chapitre V où il généralise les résultats de P. Dubreil [*Contribution à la théorie des demi-groupes*, Gauthier-Villars, Paris 1941, Mémoires Acad. Sci. Inst. France, t. 63, pp 1-52] relatifs aux groupes homomorphes à un demi-groupe. À cet endroit, il donne la définition d'un hypergroupe complètement régulier.

Définition : Un hypergroupe H est dit complètement régulier si :

a. Il existe dans H une unité scalaire e telle que :
   $e \in a * b \Rightarrow e \in b * a$
b. $\forall x \in H, \exists x' \in H$, unique tel que $e \in x * x'$

Et il note ceci juste après : « Cette définition n'est pas la même que celle donnée par M. Dresher et O. Ore. De plus, nous ne sommes pas arrivés à construire explicitement un hypergroupe complètement régulier qui ne soit pas un groupe (un procédé possible consisterait à construire un hypergroupe abélien de la forme G/ g^g, ou G est un groupe, et g un sous groupe de G.) »