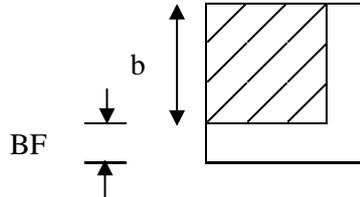


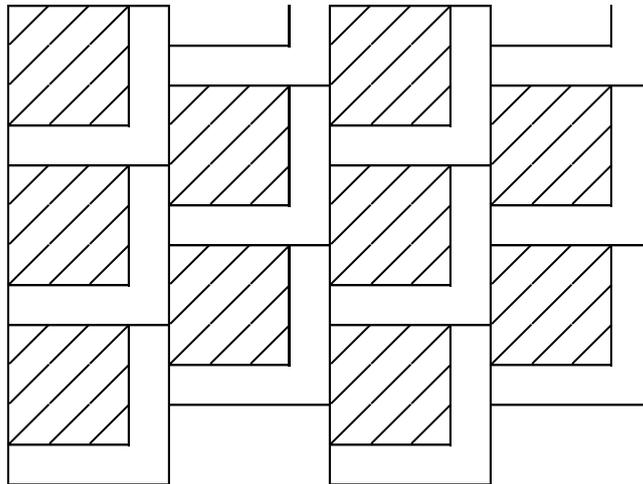
## Sur le modèle géométrique de Yu et Li

A. Fézoua, N.Lygeros, I. Pitault

Le modèle géométrique de Yu et Li a pour but de donner une approximation simple de la tortuosité d'un chemin de flux dans un milieu poreux. Pour cela, ils définissent une cellule élémentaire en deux dimensions :



Ensuite, ils vont paver le plan de la manière suivante :



Ainsi la surface totale de la cellule élémentaire est égale à

$$V_t = (b + BF)^2$$

dans le formalisme de Yu et Li.

Aussi la surface totale du pore est égale à :

$$V_p = (BF)^2 + 2BF \times b$$

Comme la porosité  $\varphi = \frac{V_p}{V_t}$  nous avons donc :

$$\varphi = \frac{(BF)^2 + 2BF \times b}{(b + BF)^2} = \frac{BF^2 + 2BF \times b + b^2 - b^2}{(b + BF)^2}$$

$$\varphi = \frac{(b + BF)^2 - b^2}{(b + BF)^2} = 1 - \left( \frac{b}{b + BF} \right)^2$$

De cela, nous en déduisons que  $1 - \varphi = \frac{b^2}{(BF + b)^2}$

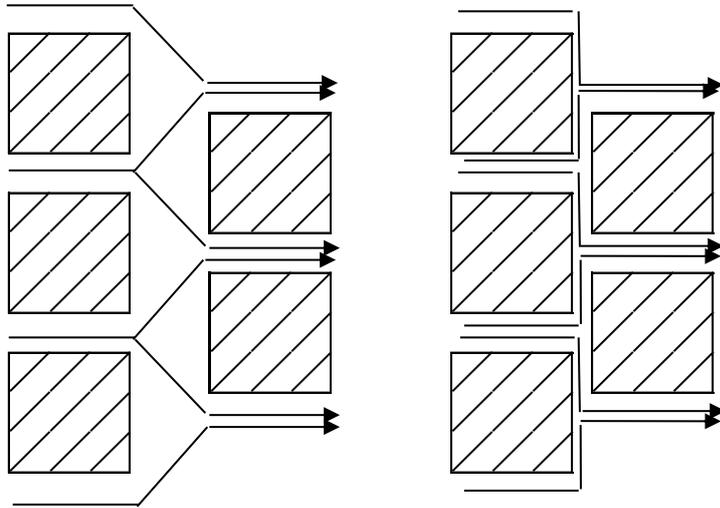
$$\sqrt{1 - \varphi} = \frac{b}{BF + b} \Leftrightarrow BF + b = \frac{b}{\sqrt{1 - \varphi}}$$

Et donc :  $BF = b \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \varphi}} - 1 \right)$

Aussi nous avons :

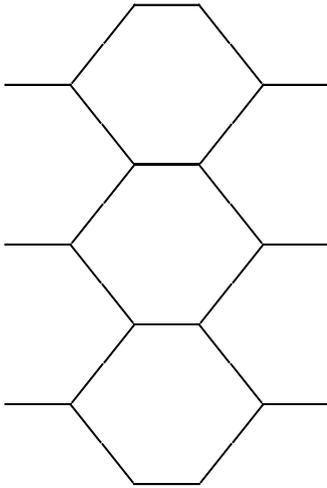
$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} BF = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varphi \rightarrow 1} BF = +\infty$$

Ce qui est cohérent avec la modélisation du milieu. Yu et Li considèrent ensuite deux configurations idéales :

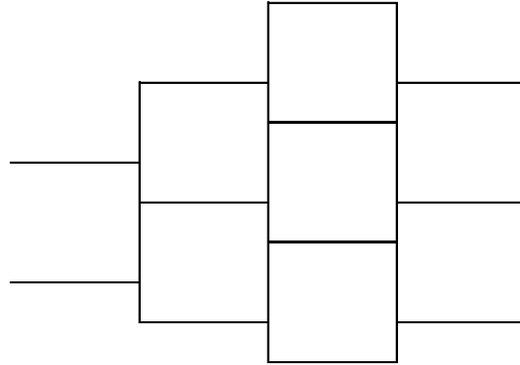


Celles-ci nous les interprétons comme deux réseaux : l'un hexagonal et l'autre carré.

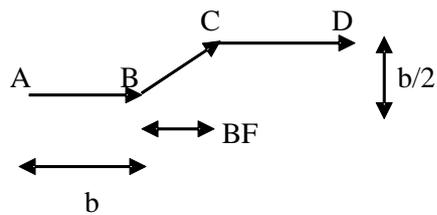
A



B



Dans la configuration A, le chemin est le suivant :



L'élément diagonal se calcule à l'aide du théorème de Pythagore :

$$BC^2 = BF^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$BC^2 = b^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\varphi}} - 1 \right)^2 + \frac{b^2}{4}$$

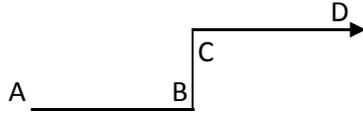
$$BC = b \sqrt{\left( \frac{1}{\sqrt{1-\varphi}} - 1 \right)^2 + \frac{1}{4}}$$

Aussi nous avons :  $\lim_{\varphi \rightarrow 0} BC = \frac{b}{2}$  et  $\lim_{\varphi \rightarrow 1} BC = +\infty$

Cela nous donne donc la tortuosité  $\tau_a$  :

$$\tau_a = \frac{BC}{BF} = \sqrt{1-\varphi} \frac{\sqrt{\left( \frac{1}{\sqrt{1-\varphi}} - 1 \right)^2 + \frac{1}{4}}}{1 - \sqrt{1-\varphi}}$$

Dans la configuration B, le chemin est le suivant :



Cette fois, la tortuosité  $\tau_b$  est égale à :

$$\tau_b = \frac{BC + b + BF}{b + BF} = 1 + \frac{BC}{b + BF}$$

$$\tau_b = 1 + \frac{b/2}{b + b(1/\sqrt{1-\varphi} - 1)} = 1 + \left( \frac{1}{1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\varphi}}} \right) / 2$$

$$\tau_b = 1 + \frac{\sqrt{1-\varphi}}{2}$$

Yu et Li effectuent ce dernier calcul de manière différente car le chemin a une partie verticale et donc perpendiculaire à l'axe principal. Aussi ils se ramènent à la cellule élémentaire.

Il est donc nécessaire de noter que le même type de calcul dans la configuration A donnerait la tortuosité suivante :

$$\tau_A = \frac{BC + b}{BF + b} = \frac{b \sqrt{\left( \frac{1}{\sqrt{1-\varphi}} - 1 \right)^2 + \frac{1}{4}} + b}{b \left( \frac{1}{\sqrt{1-\varphi}} - 1 \right) + b}$$

$$\tau_A = \frac{\sqrt{\left( \frac{1}{\sqrt{1-\varphi}} - 1 \right)^2 + \frac{1}{4}} + 1}{\frac{1}{\sqrt{1-\varphi}} - 1 + 1} = \sqrt{1-\varphi} \left( \sqrt{\left( \frac{1}{\sqrt{1-\varphi}} - 1 \right)^2 + \frac{1}{4}} + 1 \right)$$

Dans le cadre de leur modèle, Yu et Li considèrent que l'ensemble des configurations possibles pour les chemins se ramène aux deux configurations traitées, dans une approximation de premier ordre. Il en déduit donc que la tortuosité moyenne est simplement la moyenne arithmétique de deux tortuosités  $\tau_A$  et  $\tau_B$

$$\tau_{av} = (\tau_a + \tau_b) / 2$$

$$\tau_{av} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \sqrt{1-\varphi} + \sqrt{1-\varphi} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varphi}} - 1\right)^2 + \frac{1}{4}}}{1 - \sqrt{1-\varphi}} \right]$$

Aussi avec la modification mentionnée nous aurions :

$$\tau_{av} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \sqrt{1-\varphi} + \sqrt{1-\varphi} \left( \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varphi}} - 1\right)^2 + \frac{1}{4}} + 1 \right) \right]$$

Enfin, même dans une première approximation, il serait judicieux d'examiner le problème des pondérations des configurations de chemins.