Application du Théorème de Kirchhoff au carré et au cube

N. Lygeros, I. Pitault

Le Théorème de Kirchhoff qui généralise le théorème de Cayley permet de retrouver le nombre d'arbres couvrant un graphe donné via n'importe lequel des cofacteurs de la matrice laplacienne du graphe considéré.

Considérons un carré que nous interprétons comme un 4-cycle, nous avons alors la matrice laplacienne égale à :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Considérons le cofacteur suivant : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Aussi $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$

Il est donc couvert par 4 arbres qui sont les mêmes à isomorphie près.

Considérons à présent le graphe d'un cube alors la matrice laplacienne est égale à :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Alors en prenant le même type de cofacteur nous avons le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 384$$

Ainsi nous avons 384 arbres couvrant le cube.