Sur les hypergroupes et les H_v-groupes faiblement commutatifs d'ordre 2.

N. LYGEROS

Considérons l'ensemble des hypergroupes au sens de Marty. Si nous adaptons à cet ensemble l'approche de Vougiouklis à savoir l'affaiblissement de l'axiome d'associativité, nous obtenons l'ensemble des H_v-groupes. En généralisant cette approche et en l'exploitant sur la généralisation qui engendre l'ensemble des hyperanneaux nous obtenons l'ensemble des hyperstructures. Cette fois en adoptant la tactique de Mittas qui a réduit l'ensemble des hyperanneaux au sens de Krasner, sur l'ensemble des hyperanneaux généralisés, nous obtenons l'ensemble des H_v-groupes faiblement commutatifs. Cette stratégie certes non uniforme nous amènes entre autres à définir l'ensemble des hypergroupes faiblement commutatifs. Ces derniers sont donc engendrés par les axiomes suivants :

Axiome de reproduction : $\forall x \in H\ xH = Hx = H$

Axiome d'associativité : $\forall (x, y, z) \in H^3\ x(yz) = (xy)z$

Axiome de faible commutativité : $\forall (x, y) \in H^2\ (xy) \cap (yx) \neq \emptyset$

où la combinaison des deux premiers axiomes correspond à ceux qui générent l'ensemble des hypergroupes au sens de Marty.

Sans avoir recours à un processus d'énumération et d'isomorphie, nous pouvons démontrer de manière élémentaire le théorème suivant.

Théorème 1. *Les hypergroupes d'ordre 2 sont faiblement commutatifs.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un hypergroupe d'ordre 2 qui ne soit pas faiblement commutatif. Il vérifie donc les deux premiers axiomes précédents et $\forall (x, y) \in H^2\ (xy) \cap (yx) \neq \emptyset$. Sans perdre la généralité du raisonnement posons $xy = x$. Comme nous n'avons que deux éléments nécessairement $yx = y$ à l'aide de l'axiome de reproduction nous en déduisons que $xx = yy = H$. Cependant si considérons $(xy)x$ et $x(yx)$ nous obtenons : $(xy)x = xx = H$ et $x(yx) = xy = x$ ce qui est absurde puisque l'axiome d'associativité n'est pas respecté. □

Via cette méthode nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème 2. *Il n'existe que deux H_v-groupes non faiblement commutatifs d'ordre 2.*

Démonstration. Via la même méthode nous obtenons deux candidats à savoir : (H, a, b, H) et (H, b, a, H) qui ne sont pas isomorphes. Comme ils vérifient par construction l'axiome de reproduction, il nous suffit de vérifier l'application de l'axiome d'associativité. Nous avons donc à traiter 4 cas $a(aa) = H$, $a(ab) = aa = H = (aa)b$

$$\begin{cases} a(ba) = ab = a \\ (ab)a = aa = H \text{ } et \text{ } a \cap H \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} b(aa) = bH = H \\ (ba)a = ba = b \; et \; H \cap b \neq \emptyset \end{cases}$$

□

Enfin via ce théorème et la classification de Bayon-Lygeros nous en déduisons :

Théorème 3. *Il n'existe que 18 H_v-groupes faiblement commutatifs d'ordre 2.*