Etude de la propriété de commutativité faible dans les hypergroupes

N. Lygeros

H hypergroupe $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall x \in H & x\,H = H\,x = H & \text{Axiome de Reproduction} \\ \forall (x,y,z) \in H^3 & (x\,y)\,z = x\,(y\,z) & \text{Axiome d'associativité} \end{cases}$

H faiblement commutatif $\Rightarrow$ $\forall (x,y) \in H^2 \quad x\,y \cap y\,x \neq \varnothing$

Proposition : L'axiome d'associativité et la propriété de commutativité faible n'impliquent pas l'axiome de reproduction.

Démonstration : En réalité nous pouvons trouver un contre-exemple ayant les propriétés suivantes : $\begin{cases} x\,y \cap y\,x \neq \varnothing \\ (x\,y)\,z = x\,(y\,z) \\ x\,H = H \end{cases}$ comme la structure

	a	b
a	a	b
b	H	b

Comme $a\,b = b$ et $b\,a = H$ donc $a\,b \cap b\,a = b \neq \varnothing$

$a\,H$: $\begin{cases} a\,a = a \\ a\,b = b \end{cases}$ et $b\,H$: $\begin{cases} b\,a = H \\ b\,b = b \end{cases}$

$\Rightarrow \quad a\,H = H \qquad\qquad \Rightarrow \quad b\,H = H$.

$$\begin{cases} (a\,a)\,b = a\,b = b = a\,b = a\,(a\,b) \\ (a\,b)\,a = b\,a = H = a\,H = a\,(b\,a) \\ (b\,a)\,a = H\,a = H = b\,a = b\,(a\,a) \end{cases}$$

Par contre $H\,b \neq H$

car $\begin{cases} a\,b = b \\ b\,b = b \end{cases}$

□

Proposition : L'axiome de reproduction et la propriété de commutativité faible n'impliquent pas l'axiome d'associativité.

Démonstration : Considérons la structure suivante qui est commutative et non simplement faiblement commutative. Elle vérifie l'axiome de reproduction.

Par contre : $(a\,a)\,b = H\,b = H$

$a\,(a\,b) = a\,b = b$

	a	b
a	H	b
b	b	a

□

Proposition : Pour l'ordre 2, l'axiome de reproduction et la propriété de commutativité impliquent la faible associativité.

Démonstration :

- Si $x\,y \cap y\,x = x$ alors $x\,y = x$ ou $y\,x = \mathrm{x}$ (choix unique à isomorphie près)

Dans ce cas : $x\,y = y\,x = x$ est inférieure dans le sens de l'inclusion sur les hyperopérations et comme le groupe est H_v-groupe, ses supérieures le sont donc nous avons faible associativité.

- Si $x\,y \cap y\,x = H$ alors

$$x\,y = y\,x = H$$

$$y\,(x\,y) = (y\,x)\,y$$

$$y\,H = H\,y = H$$

d'où la faible associativité.

□