

Ο νόμος των μεγάλων αριθμών και το κριτήριο της αναμενόμενης αξίας

N. Λυγερός

Θεώρημα : Έστω τυχαίες μεταβλητές $X_1, \dots, X_n, \dots$ ανεξάρτητες μεταξύ τους και ίδιας κατανομής με $E(X_j) = \mu$ και $Var(X_j) = \sigma^2$. Τότε για

κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0$.

Με αυτόν τον νόμο των μεγάλων αριθμών, τον οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όταν τα δεδομένα είναι ανεξάρτητα και επαναλαμβανόμενα, η ουδέτερη αβεβαιότητα δεν αποτελεί ένα νοητικό εμπόδιο παρά μια σημαντική παράμετρο. Δεν υπάρχει λόγος να την αποφύγουμε εφόσον έμμεσα αφοπλίζουμε την ισχύ της. Επιπλέον μας δίνει την ευκαιρία να δημιουργήσουμε ένα αντικειμενικό κριτήριο όταν ισχύουν οι προϋποθέσεις του. Μπορούμε με αυτόν τον τρόπο να επιλέξουμε αποτελεσματικά μεταξύ μιας βέβαιας επιλογής και μιας τυχαίας με αβέβαιες εκβάσεις. Πιο μαθηματικά το πρόβλημα είναι το εξής: ποια επιλογή είναι προτιμότερη μεταξύ Q (βέβαιο ποσό) και $\sum_i \pi_i A_i$ όπου $\pi_i \geq 0$ και $\sum_i \pi_i = 1$.

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο εισέρχεται το κριτήριο μεγιστοποίησης.

Επιλέγουμε j αν ισχύει $E(A_j) = \max \{E(A_i)\}$

Το κυριότερο χαρακτηριστικό αυτού του κριτηρίου είναι ότι είναι αντικειμενικό με την έννοια ότι είναι συμμετρικό για όλους τους αποφασίζοντας. Έτσι μπορούμε να το ερμηνέψουμε και ως ένα από τα αποτελέσματα της θεωρίας αποφάσεων τουλάχιστον σε ένα πρώτο στάδιο. Όμως κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας, οι επιλογές των αποφασιζόντων δεν είναι αναγκαστικά ίδιες. Έχουμε λοιπόν ένα αντικειμενικό κριτήριο δίχως αυτό να σημαίνει ότι είναι παγκόσμιο. Αυτή η πρώτη παρατήρηση μάς οδηγεί φυσιολογικά στα όρια των ορισμών του νόμου και του κριτηρίου, με άλλα λόγια στην υποκειμενικότητα. Εδώ όμως και πάλι, ακόμα και αν δεν έχουμε ένα αντικειμενικό κριτήριο, μπορούμε να καθορίσουμε την παγκοσμιότητα μέσω του ορθολογισμού της επιλογής. Ενώ η επιλογή δεν είναι αντικειμενική, μπορούμε υπό γενικευμένους όρους να επινοήσουμε τη συμπεριφορά των αποφασιζόντων με έναν τρόπο που είναι κάποτε και πιο αποτελεσματικός σε σχέση με το κριτήριο μεγιστοποίησης της αναμενόμενης αξίας. Το να υπάρχει επιλογή ακόμα και με αβεβαιότητα, αυτό δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει ορθολογική απόφαση. Είναι λοιπόν μια λογική εξέλιξη το να παίρνουμε μια απόφαση μέσω της συνάρτησης ωφελιμότητας εφόσον αυτή γενικεύει το κριτήριο της αναμενόμενης αξίας όταν δεν ισχύει ο νόμος των μεγάλων αριθμών. Επιπλέον η συνάρτηση ωφελιμότητας μάς επιτρέπει να καθορίσουμε το προφίλ του αποφασίζοντος, εφόσον η μορφή της συνάρτησης συσχετίζεται με τις προτιμήσεις του. Το άλλο πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ο φυσικός διαχωρισμός που υπάρχει μεταξύ των παικτών. Μπορούμε έτσι να αναλύσουμε τις επιλογές του καθενός και να δούμε ότι τα αποτελέσματα δεν είναι απαραίτητα συμμετρικά όπως με το κριτήριο αναμενόμενης αξίας δίχως αυτό να σημαίνει ότι δεν μπορούμε να προβλέψουμε τις συμπεριφορές των παικτών.