Des formules de Newton-Girard à la théorie spectrale des graphes

N. Lygeros, I. Pitault

Les formules de Newton-Girard mettent en relation les polynômes symétriques, les polynômes symétriques élémentaires et les sommes de Newton. Cette manière de procéder nous permet d'éviter le calcul des racines explicites d'un polynôme tout en calculant les sommes des puissances successives de toutes les racines du polynôme considéré.

Considérons les polynômes symétriques définis par la formulation suivante :

$$p_k(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^k$$

et les polynômes symétriques élémentaires :

$$e_0(x_1,....,x_n)=1,\quad e_1(x_1,....x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$e_2(x_1,...,x_n)=\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$$

$$e_4(x_1...x_n)=x_1x_2x_3...x_n$$

$$e_k(x_1,...,x_n)=0 \quad \text{pour } k>n$$

Aussi les formules de Newton-Girard s'expriment aussi :

$$ke_k(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}e_{k-i}(x_1,...,x_n)\,p_i(x_1,...,\mathrm{x}_n)$$

Comme ces formules sont indépendantes des variables quant à leur relation, il est possible de les exprimer ainsi :

$$e_1=p_1,\qquad 2e_2=e_1p_1-p_2$$

$$3e_3=e_2p_1-e_1p_2+p_3$$

$$4e_4=e_3p_1-e_2p_2+e_1p_3-p_4$$

Il est possible d'écrire inversement :

$$p_1=e_1,\quad p_2=e_1p_1-2e_2$$

$$p_3=e_1p_2-e_2p_1+3e_3$$

$$p_4=e_1p_5-e_2p_2+e_3p_1-4e_4$$

A partir de cela, il est possible de faire un transport de structure et d'appliquer ces formules aux racines d'un polynôme caractéristique d'une matrice. Ainsi il est clair que nous pouvons faire le lien avec les valeurs propres et les puissances de la matrice considérée. Le point-clef provient évidemment des traces. A partir de celles-ci, nous pouvons même calculer le polynôme caractéristique via la résolution du système triangulaire des équations obtenues. Dans ce nouveau cadre, nous pouvons plonger les expressions des polynômes symétriques élémentaires en fonction des sommes de Newton.

$$e_1 = p_1$$
$$e_2 = \frac{1}{2} p_1^2 - \frac{1}{2} p_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2)$$
$$e_3 = \frac{p_1^3}{6} - \frac{1}{2} p_1 p_2 + \frac{1}{3} p_3 = \frac{1}{6}\left(p_1^3 - 3p_1 p_2 + 2p_3 \right)$$
$$e_4 = \frac{1}{24} p_1^4 - \frac{1}{4} p_1^2 p_2 + \frac{1}{8} p_2^2 + \frac{1}{3} p_1 p_3 - \frac{1}{4} p_4$$
donc
$$e_4 = \frac{1}{24}\left(p_1^4 + 6p_1^2 p_2 + 3p_2^2 + 8p_1 p_3 + 6p_4 \right)$$
A présent, si nous considérons une matrice d'adjacence nous obtenons les expressions suivantes en tenant compte du fait que les termes de la diagonale sont nulles.

$$e_1 = 0,\ e_2 = -\frac{1}{2} tr(A^2),\ \ e_3 = \frac{1}{3} tr(A^3)$$
$$e_4 = \frac{1}{8} tr(A^2)^2 + \frac{1}{4} tr(A^4)$$
Ceci met en évidence le lien avec la théorie spectrale des graphes.