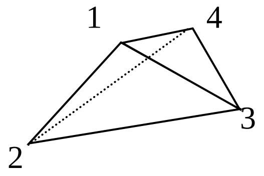
Enumération explicite des chemins de longueur 4 dans un tétraèdre

N. Lygeros, I. Pitault

Considérons un tétraèdre étiqueté de la manière suivante :



Chacun de ses sommets, en termes de graphe, est de degré trois. Il possède 4 sommets, 4 faces, et 6 arêtes. Il vérifie donc la formule d'Euler. Comme il s'agit du graphe complet K4, sa matrice d'adjacence associée est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aussi son polynôme caractéristique est égal à $x^4 - 6x^2 - 8x - 3$. De cela, nous en déduisons directement le nombre de chemins de longueur 2, puisqu'il s'agit du nombre d'arêtes mais aussi de la moitié de la trace de la matrice d'adjacence au carré. De la même manière, les chemins de longueur 3, correspondent au nombre de faces du tétraèdre mais aussi au sixième de la trace de la matrice d'adjacence au cube. Nous voyons dans ce cadre que nous n'avons pas de terme correctif car en réalité dans ces énumérations nous fusionnons les notions de chemins et de cycle. Par contre pour la longueur 4 la différence est importante, d'où la nécessité d'une explication. Ainsi pour les cycles nous avons :

1-2-3-4-1, 1-2-4-3-1, 1-3-2-4-1, 1-3-4-2-1, 1-4-2-3-1, 1-4-3-2-1,

Mais aussi : 1-2-3-2-1, 1-2-4-2-1, 1-3-2-3-1, 1-3-4-3-1, 1-4-2-4-1, 1-4-3-4-1.

Et : 1-2-1-3-1, 1-2-1-4-1, 1-3-1-2-1, 1-3-1-4-1, 1-4-1-2-1, 1-4-1-3-1.

Enfin : 1-2-1-2-1, 1-3-1-3-1, 1-4-1-4-1

Nous avons ainsi obtenu 21 cycles à partir du sommet 1. Aussi pour l'ensemble des sommets nous avons 84 chemins. Et c'est précisément la valeur de la trace de la matrice d'adjacence à l'exposant quatre. Seulement, parmi ces cycles, seuls les six premiers correspondent véritablement à de véritables circuits car ils ne repassent pas par les mêmes points. Cependant même ceux-ci ne correspondent pas à des faces carrées car ils sont tous court-circuitables par des cycles de longueur 3 qui représentent les faces triangulaires du tétraèdre. Aussi nous retrouvons de manière topologique via le théorème spectrale des graphes, les caractéristiques géométriques du tétraèdre sans pour autant qu'il soit nécessairement canonique.