

H_v-ΟΜΑΔΕΣ ΚΑΙ ΑΣΘΕΝΗΣ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΟΤΗΤΑ (COW H_v-GROUPS)

N. Ανταμπούφης και N. Λυγερός

Opus of N. Lygeros,

1260. H_v-groupes et faible commutativité (avec N. Andaboufis), Perfection, vol. 6 6 6/2005

Εισαγωγή

Το περιβάλλον που αναπτύσσονται οι προτάσεις αυτής της εργασίας είναι εκείνο των H_v-δομών. Οι H_v-δομές εισήχθησαν το 1990 από τον Θ. Βουγιουκλή και αποτελούν τη μεγαλύτερη κλάση υπερδομών. Σ' αυτές τις υπερδομές ικανοποιούνται τα ασθενή αξιώματα δηλ. η ισότητα έχει αντικατασταθεί από τη μη κενή τομή. Στη συνέχεια υπενθυμίζουμε μερικούς ορισμούς και θεωρήματα για έννοιες που χρησιμοποιούνται παρακάτω.

Ορισμοί 1. Θεωρούμε το σύνολο H εφοδιασμένο με μια υπερπράξη (·). Η δομή (H, ·) είναι H_v-ψευδοομάδα (H_v-quasigroup) αν επαληθεύει το αξίωμα αναπαραγωγικότητας, δηλ. $xH = Hx = H, \forall x \in H$. Η δομή (H, ·) είναι H_v-ημιομάδα αν είναι ασθενώς προσεταιριστική (WASS). Η δομή (H, ·) είναι H_v-ομάδα όταν είναι H_v-ψευδοομάδα και H_v-ημιομάδα.

Ορισμοί 2. (Vougiouklis, Th., *Hyperstructures and their Representations.*, Hadronic Press., (1994).) Θεωρούμε τις H_v-ημιομάδες (H, ·) και (H, *) που ορίζονται στο ίδιο σύνολο H. Η πράξη (·) ονομάζεται μικρότερη (smaller) από την (*) και η πράξη (*) μεγαλύτερη (greater) από την (·) αν και μόνο αν υπάρχει αυτομορφισμός $f \in \text{Aut}H$ τέτοιος ώστε $x \cdot y \subseteq f(x * y), \forall (x, y) \in H^2$. Τότε γράφουμε $\cdot \leq *$ και λέμε ότι η (H, *) περιέχει την (H, ·). Αν η (H, ·) περιέχεται στην (H, *) και είναι δομή (ομάδα, δακτύλιος κ.λπ.) τότε ονομάζεται βασική δομή και η (H, *) ονομάζεται H_b-δομή (αντ. H_b-ομάδα, H_b-δακτύλιος κ.λπ.). Ελάχιστη (minimal) ονομάζεται κάθε H_v-δομή που δεν περιέχει άλλη αντίστοιχη H_v-δομή ορισμένη στο ίδιο σύνολο.

Θεώρημα 3. (Vougiouklis, Th.) Οι ασθενείς ιδιότητες μιας υπερπράξης ισχύουν σε κάθε άλλη μεγαλύτερη από αυτήν.

H_v-ομάδες τάξης 2 και ασθενής αντιμεταθετικότητα

Ορισμός 4. Η τετράδα (xx, xy, yx, yy) είναι ο πίνακας πράξης της (H, ·) με $H = \{x, y\}$.

Παρατήρηση 5. Οι H_v-ομάδες (x, H, H, y) και (y, H, H, x) δεν περιέχουν την κυκλική ομάδα τάξης 2. Συνεπώς οι H_v-ομάδες τάξης 2 δεν είναι πάντα H_b-ομάδες.

Παρατήρηση 6. Υπάρχουν ασθενώς αντιμεταθετικές (COW) H_v-ομάδες τάξης 3 που είναι ελάχιστες και δεν περιέχουν τη κυκλική ομάδα τάξης 3.

Παράδειγμα: Όταν $H = \{a, b, c\}$, η παρακάτω COW H_v -ομάδα δεν περιέχει αντιμεταθετική ομάδα.

	a	b	c
a	b	{a, b}	{a, c}
b	H	a	b
c	{a, b}	{b, c}	c

Πρόταση 7. Κάθε COW ψευδοομάδα με δύο στοιχεία είναι H_v - ομάδα.

Απόδειξη. Έστω ότι $H = \{x, y\}$. Η δομή (H, \cdot) ικανοποιεί το αξίωμα αναπαραγωγής δηλαδή: $\forall a \in H: aH = H = Ha$, και είναι ασθενής αντιμεταθετική (COW) δηλαδή:

$\forall (a, b) \in H^2: ab \cap ba \neq \emptyset$. Τότε $xy \cap yx = H$ ή $xy \cap yx = \{x\}$ ως προς ισομορφισμό.

Για να εξετάσουμε αν η πράξη είναι ασθενώς προσεταιριστική (WASS) πρέπει να ελέγξουμε τις τομές $(ab)c \cap a(bc)$ για κάθε $(a, b, c) \in H^3$. Επειδή η (H, \cdot) είναι COW θα έχουμε $(aa)a \cap a(aa) \neq \emptyset$ για κάθε $a \in H$.

(A) Όταν $xy \cap yx = H$ τότε $xy = yx = H$ διότι: $|H| = 2$. Σε αυτή την περίπτωση, το

$xy = yx = H$ θα εμφανίζεται πάντοτε σε ένα τουλάχιστον από τα γινόμενα $(ab)c, a(bc)$ με $(a, b, c) \in H^3$ και όχι όλα ίδια. Τότε, λόγω της αναπαραγωγής, έχουμε $(ab)c = H$ ή $a(bc) = H$ δηλ. η (H, \cdot) είναι WASS άρα είναι H_v - ομάδα.

(B) Όταν $xy \cap yx = \{x\}$ τότε $xy = \{x\}$ ή $yx = \{x\}$. Σε αυτήν την περίπτωση, η (H, \circ) με $x \circ y = y \circ x = \{x\}$ και $x \circ x = xx, y \circ y = yy$ περιέχεται στην (H, \cdot) δηλ. $\circ \leq \cdot$. Ο πίνακας πράξης της (H, \circ) είναι (xx, x, x, yy) οπότε λόγω της αναπαραγωγής, πρέπει $y \in xx \cap yy$. Τότε η ομάδα (y, x, x, y) περιέχεται στην (H, \circ) άρα και στην (H, \cdot) , οπότε η (H, \cdot) είναι WASS άρα και H_v - ομάδα. ■

Παρατήρηση 7. Οι μόνες H_v -ομάδες με δύο στοιχεία που δεν είναι COW είναι οι: (H, x, y, H) και (H, y, x, H) .

Παρατήρηση 8. Οι COW H_v -ομάδες δεν περιέχουν πάντα COM (δηλ. αντιμεταθετικές) H_v -ομάδες. Με τη βοήθεια της παρατήρησης 7 μπορούμε να δημιουργήσουμε COW H_v -ομάδες (όπως (H, x, H, H)) που είναι και H_b -ομάδες.

Πόρισμα 9. Όλες οι COW H_v -ομάδες τάξης 2 εκτός από την (x, H, H, y) είναι H_b -ομάδες.