Αποκλειστικές H_v-ομάδες συνόλων κορυφών γράφων

Δ. Κάτσιος, Ν. Λυγερός

Ορισμοί Έστω γράφος H με a,b κορυφές του H και A, B σύνολα κορυφών του H

$|ab| \coloneqq απόσταση\ από\ την\ κορυφή\ a\ ως\ την\ κορυφή\ b$

$ab \coloneqq υπάρχει\ ακμή\ που\ ενώνει\ τις\ κορυφές\ a\ και\ b$

$\overbrace{ab}$:= σύνολο κορυφών ενός γράφου που ανήκουν σε ελάχιστη διαδρομή από την κορυφή a ως την κορυφή b

$\underbrace{ab}$:= σύνολο ελάχιστου πλήθους κορυφών που αν αφαιρεθούν μαζί με τις ακμές τους, οι κορυφές a και b δεν συνδέονται

$\overparen{ab}$:= σύνολο κορυφών ενός γράφου που ανήκουν σε ελάχιστο κύκλο που περιέχει την κορυφή a και την κορυφή b

$\overline{\overline{ab}}$:= σύνολο κορυφών ενός γράφου που μαζί με τις a και b σχηματίζουν κλίκα

$\overleftrightarrow{a} \coloneqq \{x/\exists y: ax, ay, xy\}$

1. Ορίζουμε την υπερπράξη $*_1$(a,b) ανάμεσα σε δύο κορυφές του γράφου ως εξής:

$$(a *_1 b) = \left\{a, b, \{c/ \exists\ \overbrace{ab} : c \in \overbrace{ab}\}\right\}$$

$$(\mathrm{A} *_1 \mathrm{B}) = \left\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \{C/ \exists\ \overbrace{ab} : C \in \overbrace{ab}, \forall\ \mathrm{a} \in A, \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}\right\}$$

<u>Λήμμα</u>: (H, $*_1$) είναι H_v-ομάδα

<u>Απόδειξη</u>: $\forall a, b \in H: a, b \epsilon (a *_1 b) \Rightarrow aH = Ha = H$

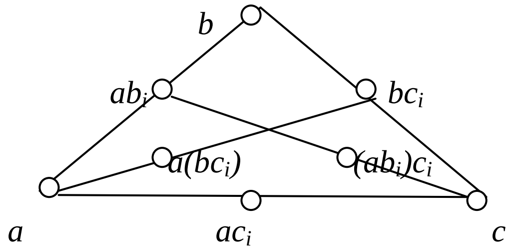
$(a *_1 b) *_1 c \supset c$

$a *_1 (b *_1 c) \supset c$

$\Rightarrow (a *_1 b) *_1 c \cap a *_1 (b *_1 c) \supseteq c \neq \emptyset$

<u>Λήμμα</u>: (H, $*_1$) δεν είναι υπερομάδα

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ο παρακάτω γράφος H_1



$(a *_1 b) *_1 c = (\{a, b, ab_i\} *_1 c) = a, b, ab_i, c, ac_i, bc_i, (ab_i)c_i$
$a *_1 (b *_1 c) = (a *_1 \{b, c, bc_i\}) = a, b, ab_i, c, ac_i, bc_i, a(bc_i)$
$\Rightarrow a *_1 (b *_1 c) \neq (a *_1 b) *_1 c$

2. Ορίζουμε την υπερπράξη $*_2$(a,b) ανάμεσα σε δύο κορυφές του γράφου ως εξής:

$$(a *_2 b) = \left\{a, b, \{c / \forall\ \widetilde{ab} : c \ \in\ \widetilde{ab}\}\right\}$$

$$(\mathrm{A} *_2 \mathrm{B}) = \left\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \{C / \forall\ \widetilde{ab} : C \ \in\ \widetilde{ab}, \forall\ \mathrm{a} \in A, \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}\right\}$$

<u>Λήμμα</u>: (H, $*_2$) είναι H_v

<u>Απόδειξη</u>: Παρόμοια με την απόδειξη για $*_1$

<u>Λήμμα</u>: (H, $*_2$) δεν είναι υπερομάδα

<u>Απόδειξη</u>: Παρόμοια με την απόδειξη για $*_1$

3. Ορίζουμε την υπερπράξη $*_3$(a,b) ανάμεσα σε δύο κορυφές του γράφου ως εξής:

$$(a *_3 b) = \left\{a, b, \{c / \exists!\ \widetilde{ab} : c \ \in\ \widetilde{ab}\}\right\}$$

$$(\mathrm{A} *_3 \mathrm{B}) = \left\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \{C / \exists!\ \widetilde{ab} : C \ \in\ \widetilde{ab}, \forall\ \mathrm{a} \in A, \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}\right\}$$

<u>Λήμμα</u>: (H, $*_3$) είναι H_v

<u>Απόδειξη</u>: Παρόμοια με την απόδειξη για $*_1$

Λήμμα: (H, $*_3$) δεν είναι υπερομάδα

Απόδειξη: Παρόμοια με την απόδειξη για $*_1$

4. Ορίζουμε την υπερπράξη $*_4$(a,b) ανάμεσα σε δύο κορυφές του γράφου ως εξής:

$(a *_4 b) = \{c/(|ac| = |ab|) \cup (|cb| = |ab|)\}$

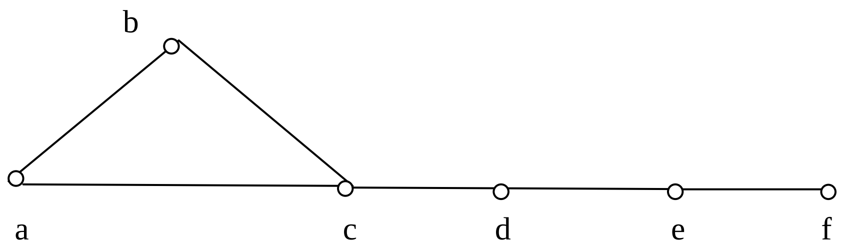
$(\mathrm{A} *_4 \mathrm{B}) = \{c/(|\mathrm{ac}| = |\mathrm{ab}|) \cup (|cb| = |\mathrm{ab}|) \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}, \mathrm{b} \in B\}$

Λήμμα: (H, $*_4$) είναι H_v

Απόδειξη: Παρόμοια με την απόδειξη για $*_1$

Λήμμα: (H, $*_4$) δεν είναι υπερομάδα

Απόδειξη: Έστω γράφος H_2



$(a *_4 b) *_4 c = (\{a, b, c\} *_4 c) = \{a, b, c, d\}$

$a *_4 (b *_4 c) = (a *_4 \{a, b, c, d\}) = \{a, b, c, d, f\}$

$\Rightarrow (a *_4 b) *_4 c \neq a *_4 (b *_4 c)$

Σημείωση: ο H_2 είναι επίπεδος γράφος

5. Ορίζουμε την υπερπράξη $*_5$(a,b) ανάμεσα σε δύο κορυφές του γράφου ως εξής:

$(a *_5 b) = \{a, b, c/(|ac| = |ab|) \cap (|cb| = |ab|)\}$

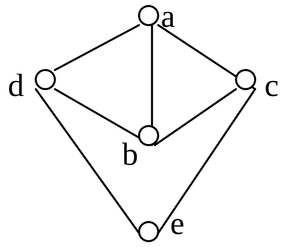
$(\mathrm{A} *_5 \mathrm{B}) = \{A, B, c/(|\mathrm{ac}| = |\mathrm{ab}|) \cap (|cb| = |\mathrm{ab}|) \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}, \mathrm{b} \in B\}$

Λήμμα: (H, $*_5$) είναι H_v

Απόδειξη: Παρόμοια με την απόδειξη για $*_1$

Λήμμα: (H, $*_5$) δεν είναι υπερομάδα

Απόδειξη: Έστω γράφος H_3



$(a *_5 b) *_5 c = (\{a, b, c, d\} *_5 c) = \{a, b, c, d, e\}$

$a *_5 (b *_5 c) = (a *_5 \{a, b, c\}) = \{a, b, c, d\}$

$\Rightarrow (a *_5 b) *_5 c \neq a *_5 (b *_5 c)$

Σημείωση: ο H_3 είναι επίπεδος γράφος

6. Ορίζουμε την υπερπράξη $*_6$(a,b) ανάμεσα σε δύο κορυφές του γράφου ως εξής:

$(a *_6 b) = \{a, b, \{c / \exists\ \overset{\frown}{ab}: c\ \in\ \overset{\frown}{ab}\}\}$

$(\mathrm{A} *_6 \mathrm{B}) = \left\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \{C / \exists\ \overset{\frown}{ab}: C\ \in\ \overset{\frown}{ab}, \forall\ \mathrm{a} \in A, \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}\right\}$

Λήμμα: (H, $*_6$) είναι H_v

Απόδειξη: Παρόμοια με την απόδειξη για $*_1$

Λήμμα: (H, $*_6$) δεν είναι υπερομάδα

Απόδειξη: Παρόμοια με την απόδειξη για $*_5$

7. Ορίζουμε την υπερπράξη $*_7$(a,b) ανάμεσα σε δύο κορυφές του γράφου ως εξής:

$(a *_7 b) = \{a, b, \{c / \exists\ \underset{\smile}{ab}: c\ \in\ \underset{\smile}{ab}\}\}$

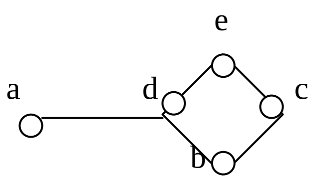
$(\mathrm{A} *_7 \mathrm{B}) = \left\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \{C/\exists \ \underbrace{ab} : C \ \in \ \underbrace{ab}, \forall \mathrm{a} \in A, \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}\right\}$

<u>Λήμμα</u>: (H, $*_7$) είναι H_v

<u>Απόδειξη</u>: Παρόμοια με την απόδειξη για $*_1$

<u>Λήμμα</u>: (H, $*_7$) δεν είναι υπερομάδα

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ο γράφος H_4



$(a *_7 b) *_7 c = (\{a, b, d\} *_7 c) = \{a, b, c, d, e\}$

$a *_7 (b *_7 c) = (a *_7 \{b, c\}) = \{a, b, c, d\}$

$\Rightarrow (a *_7 b) *_7 c \neq a *_7 (b *_7 c)$

<u>Σημείωση</u>: ο H_4 είναι επίπεδος γράφος

8. Ορίζουμε την υπερπράξη $*_8$(a,b) ανάμεσα σε δύο κορυφές του γράφου ως εξής:

$(a *_8 b) = \{a, b, \{c/\forall \ \underbrace{ab} : c \ \in \ \underbrace{ab}\}\}$

$(\mathrm{A} *_8 \mathrm{B}) = \left\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \{C/\forall \ \underbrace{ab} : C \ \in \ \underbrace{ab}, \forall \mathrm{a} \in A, \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}\right\}$

<u>Λήμμα</u>: (H, $*_8$) είναι H_v

<u>Απόδειξη</u>: Παρόμοια με την απόδειξη για $*_1$

<u>Λήμμα</u>: (H, $*_8$) δεν είναι υπερομάδα

<u>Απόδειξη</u>: Παρόμοια με την απόδειξη για την $*_7$

9. Ορίζουμε την υπερπράξη $*_9$(a,b) ανάμεσα σε δύο κορυφές του γράφου ως εξής:

$(a *_9 b) = \{a, b, \{c/c \ \in \ \sigma\varepsilon \ \acute{\varepsilon}\nu\alpha \ \overline{\overline{ab}}\}\}$

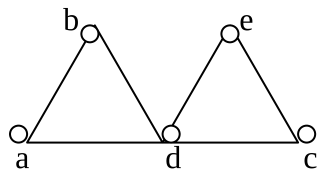
$(\mathrm{A} *_9 \mathrm{B}) = \left\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \{C/C \in \sigma\varepsilon \ \acute{\varepsilon}\nu\alpha \ \overline{\overline{\mathrm{ab}}}, \forall \ \mathrm{a} \in A, \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}\right\}$

Λήμμα: (H, $*_9$) είναι H_v

Απόδειξη: Παρόμοια με την απόδειξη για $*_1$

Λήμμα: (H, $*_9$) δεν είναι υπερομάδα

Απόδειξη: Έστω ο γράφος H_5



$(a *_9 b) *_9 c = (\{a, b, d\} *_9 c) = \{a, b, c, d, e\}$

$a *_9 (b *_9 c) = (a *_9 \{b, c\}) = \{a, b, c, d\}$

$\Rightarrow (a *_9 b) *_9 c \neq a *_9 (b *_9 c)$

Σημείωση: ο H_5 είναι επίπεδος γράφος

10. Ορίζουμε την υπερπράξη $*_{10}$(a,b) ανάμεσα σε δύο κορυφές του γράφου ως εξής:

$(a *_{10} b) = \{a, b, \{c/\forall \ \overline{\overline{ab}}: c \ \in \ \overline{\overline{ab}}\}\}$

$(\mathrm{A} *_{10} \mathrm{B}) = \left\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \{C/\forall \ \overline{\overline{ab}}: C \ \in \ \overline{\overline{ab}}, \forall \ \mathrm{a} \in A, \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}\right\}$

Λήμμα: (H, $*_{10}$) είναι H_v

Απόδειξη: Παρόμοια με την απόδειξη για $*_1$

Λήμμα: (H, $*_{10}$) δεν είναι υπερομάδα

Απόδειξη: Παρόμοια με την απόδειξη για $*_9$

11. Ορίζουμε την υπερπράξη $*_{11}$(a,b) ανάμεσα σε δύο κορυφές του γράφου ως εξής:

$(a *_{11} b) = \{a, b, \{c/\exists!\ \overline{\overline{ab}}: c\ \in\ \overline{\overline{ab}}\}\}$

$(\mathrm{A} *_{11} \mathrm{B}) = \left\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \{C/\exists!\ \overline{\overline{ab}}: C\ \in\ \overline{\overline{ab}}, \forall\ \mathrm{a} \in A, \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}\right\}$

Λήμμα: (H, $*_{11}$) είναι H_v

Απόδειξη: Παρόμοια με την απόδειξη για $*_1$

Λήμμα: (H, $*_{11}$) δεν είναι υπερομάδα

Απόδειξη: Παρόμοια με την απόδειξη για $*_9$

12. Ορίζουμε την υπερπράξη $*_{12}$(a,b) ανάμεσα σε δύο κορυφές του γράφου ως εξής:

$(a *_{12} b) = \{a, b\} \cup \left\{x/x \in \overleftrightarrow{a} \cap x \in \overleftrightarrow{b}\right\}$

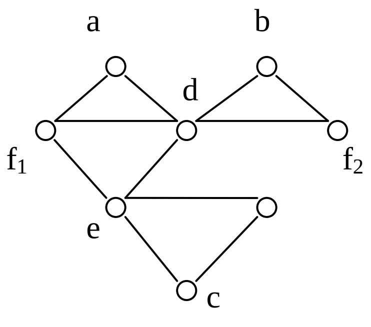
$(\mathrm{A} *_{12} \mathrm{B}) = \left\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \{C/C \in \overleftrightarrow{A} \cap C \in \overleftrightarrow{B}\ \}\right\}$

Λήμμα: (H, $*_{12}$) είναι H_v

Απόδειξη: Παρόμοια με την απόδειξη για $*_1$

Λήμμα: (H, $*_{12}$) δεν είναι υπερομάδα

Απόδειξη: Έστω ο γράφος H_6



$(a *_{12} b) *_{12} c = \{a, b, d\} *_{12} c = \{a, b, c, d, e\}$

$a *_{12} (b *_{12} c) = a *_{12} \{b, c\} = \{a, b, c, d\}$

$\Rightarrow (a *_{12} b) *_{12} c \neq a *_{12} (b *_{12} c)$

Σημείωση: ο H_6 είναι επίπεδος γράφος