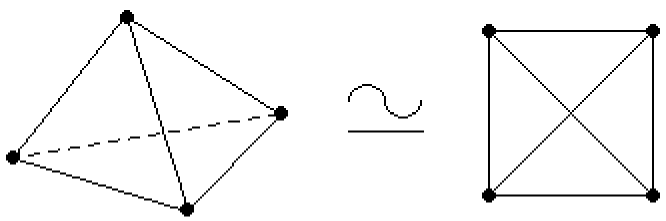
12897) Le tétraèdre en tant que paradigme d'énumération spectrale

N. Lygeros, I. Pitault

Une autre manière d'énumérer les chemins et les cycles de longueur 4 dans un tétraèdre topologique, consiste à se placer dans le cadre de la théorie spectrale des graphes afin d'exploiter toutes les possibilités des propriétés de la matrice d'adjacence du graphe associé. En effet, considérons la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors cette matrice au carré est égale à : $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Ainsi nous remarquons que sur les diagonales de cette nouvelle matrice nous retrouvons le degré des sommets du tétraèdre. De manière plus générale chaque coefficient de la matrice, correspond au nombre de chemins de longueur 2 qui relient le sommet i au sommet j du graphe associé. Nous pouvons alors définir la multiplication $\otimes$ qui correspond à une multiplication terme à terme des coefficients de la matrice d'adjacence et de son carré. Ainsi nous obtenons la matrice suivante $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. De cette manière, nous pouvons constater que cette multiplication correspond à une conjonction logique. Par exemple, dans cette matrice si nous avons un coefficient qui est égal à 2, cela signifie qu'il existe un chemin de longueur 1 et 2 chemins de longueur 2, entre le sommet i et le sommet j. A partir de cette matrice, en sommant tous les coefficients, nous obtenons le nombre 24. Ensuite si nous remarquons



qu'un circuit carré est associé à deux diagonales alors nous en déduisons que nous comptons le double par diagonale qui correspond à une arête du tétraèdre. Nous retrouvons ainsi les 24 cycles qui correspondent à 12 si nous imposons un sens de circulation. Par ailleurs, avec la multiplicité de la diagonale du carré, nous retrouvons bien au total, le nombre de cycles. Alors qu'ici nous retrouvons spécifiquement le nombre de cycles hamiltoniens puisqu'ils passent par tous les sommets du graphe associé au tétraèdre topologique.