# Caractérisation de cycles hamiltonien via la théorie spectrale des graphes.

N. Lygeros, I. Pitault

**Définitions:**
Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe simple avec *n* sommets.
Soit $A^m$ la même matrice d'adjacence à la puissance *m*.
Soient A(i,j) avec *i* et *j* de 1 à *n*, les coefficients de la matrice d'adjacence.
Soient $A^m(i,j)$ avec *i* et *j* de 1 à *n*, les coefficients de la matrice d'adjacence à la puissance m.
Soit C la matrice d'adjacence du graphe complémentaire.
Soit D le vecteur des degrés du graphe.

**Fait** :
Sachant que les coefficients des matrices $A^m$ représentent le nombre de chemins possibles de longueur *m* entre le sommet *i* et le sommet *j*, nous en déduisons que les coefficients de la diagonale de la matrice $A^m$ sont le nombre de cycles de longueur *m*.

**Lemme 1 :** Si $A(i,j)A^2(i,j)=1$, alors l'arête reliant *i* à *j* appartient à un 3-cycle.
*Démonstration :* Le produit non nul de coefficients terme à terme des matrices $A^{m1}$ et $A^{m2}$ indique la coexistence de chemins de longueur *m1* et de longueur *m2* entre les sommets *i* et *j*.

**Corollaire:** si $A(i,j)A^2(i,j)=n$, alors l'arête reliant *i* à *j* appartient à *n* 3-cycles.
*Démonstration :* Par récurrence sur le Lemme 1.

**Lemme 2 :** Si $A(i,j)A^2(i,j)=0$, alors l'arête reliant *i* à *j* n'appartient pas à un 3-cycle.
Démonstration : Le produit nul de coefficients terme à terme des matrices $A^{m1}$ et $A^{m2}$ indique qu'il n'existe pas l'un des deux chemins.

**Théorème 1 :**
Si $C(i,j)A^2(i,j) \geq 2$, alors il existe un carré ayant pour sommets *i* et *j* non adjacents mais il n'existe pas d'arête entre *i* et *j* qui correspond à la diagonale du carré. Et s'il existe un *k* et un *l* tels que $C(k,l)A^2(k,l) \geq 2$ et A(i,k)=A(k,j)=A(j,l)=A(l,i)=1 alors *ijkl* est un carré dont les diagonales ne sont pas des arêtes.
*Démonstration :* La première partie est une conséquence du Lemme 1. La seconde partie est conséquence de l'application du lemme 1 sur deux paires de sommets non-adjacents d'un carré.

**Théorème 2 :**
Si $A(i,j)(A^3(i,j)-D(i)-D(j)+1) \geq 1$, alors *i* et *j* sont les sommets adjacents de 4-cycle hamiltonien.
*Démonstration* : Via le Lemme 1, nous avons un chemin de longueur 1 et un chemin de longueur 3 entre les sommets *i* et *j*, en l'appliquant à $A(i,j)A^3(i,j)$. En considérant $A^3(i,j)-D(i)-D(j)+1$, nous éliminons les chemins non-hamiltoniens. Donc nous avons un chemin de longueur 3 hamiltonien associé à un chemin de longueur 1, par conséquent, nous obtenons un 4-cycle hamiltonien.