Itération des fonctions complexes $z \to z^m + c$

N. Lygeros

Résumé - On établit un théorème de double inclusion sur les ensembles de Mandelbrot généralisés que l'on note M_m (avec $m \in \mathbb{R}$ et $m \geq 1$). On étend ainsi le résultat de F.v. Haeseler ($m = 2$) et celui de J. H. Hubbard ($= +\infty$).

Iteration of comple function $z \to z^m + c$

Abstract - We establish a theorem of double inclusion on the generalized Mandelbrot sets that we note M_m (with $m \in \mathbb{R}$ and $m \geq 1$) extending thus the result of F. v. Haeseler ($m = 2$) and the one of J. H. Hubbard ($m = \infty$).

INTRODUCTION. - On note $D(r) = \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq r\}$, $r \in \mathbb{R}_+$ et Σ la sphere de Riemann $C \cup \{\infty\}$. Pour tout $c \in \mathbb{C}$ on note f_c l'application $z \to z^2 + c$ de Σ dans elle-même et $K_c = \{z \in \mathbb{C} | f_c^{(n)}(z) \not\to \infty$ lorsque $n \to \infty\}$ (où $f^{(n)}$ désigne l'itérée de $f \circ \ldots \circ f$). La frontière de K_c est l'ensemble de Julia de f_c. G. Julia et P. Fatou ont montré que si $0 \in K_c$ l'ensemble est connexe, et sinon il est homéomorphe à l'ensemble de Cantor. On note M (l'ensemble de Mandelbrot) l'ensemble des $c \in \mathbb{C}$ tels que $0 \in K_c$. A. Douady et J.H. Hubbard ont démontré que M était connexe.

En utilisant une autre caractérisation afin d'appliquer le théorème de L. de Branges, F. v. Haeseler [1] a montré que :

$$M \subset D(2)$$

Cependant, c'est la première caractérisation de M que nous allons utiliser ; elle est mentionnée par exemple dans l'article de P. Blanchard [2] :

$$M = \{c \in \mathbb{C} | f_c^{(n)}(0) \not\to \infty \text{ lorsque } n \to \infty\}$$

A l'aide de cette caractérisation nous allons étendre le résultat de Haeseler, et ce de façon élémentaire, aux ensembles de Mandelbrot généralisés M_m définis par :

$$M_m = \{c \in \mathbb{C} | z_n = F_{c,m}^{(n)}(0) \not\to \infty \text{ lorsque } n \to \infty\}$$

où $F_{c,m}$ désigne l'application $z \to z^m + c$ ($m \in \mathbb{R}$ et $m \geq 1$).

Pour cette définition, voir par exemple l'article de Papathomas et Julesz [3]. La définition est choisie de façon à généraliser les résultats obtenus sur $\mathbb{R}$. Les théorèmes que nous établissons ne dépendent pas du choix de la définition de l'argument de z.
Comme l'on a trivialement $M_1 = D(0)$, nous étudierons M_m pour $m > 1$. Le théorème de Hubbard : $M_\infty = D(1)$ (en topologie de Hausdorff) [4] sera démontré en corollaire, après la présentation du théorème de double inclusion, en deux parties, ainsi que les indications de sa démonstration.

Pour une démonstration détaillée et des représentations grahiques du théorème, voir [5].

Théorème A. - $(m > 1)$: $D(m^{\frac{1}{1-m}}(1 - m^{-1})) \subset M_m$

Le caractère optimal du théorème est assuré par le lemme suivant :

Lemme - Pour $m > 1$, le nombre $a = m^{1/(1-m)}(1-m^{-1})$ est le plus grand réel qui ait la propriété suivante :

$$\exists x \in \mathbb{R}_+, x^m - x + 1 = a$$

Et la démonstration du théorème découle du lemme suivant :

Lemme. - Pour $m > 1$,

$$[|z_1| \leq m^{1/(1-m)}(1-m^{-1})] \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N}^* : |z_n| \leq m^{1/(1-m)}]$$

La démonstration se fait par récurrence.

Théorème B. - Pour $m > 1$,

$$M_m \subset D(2^{1/(m-1)})$$

Le théorème est une conséquence directe du lemme suivant :

Lemme. - Pour $m > 1$, et $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$:

$$[|z_1| = 2^{1/(1-m)} + \epsilon] \Rightarrow [|z_n| \geq 2^{1/(1-m)} + n^2\epsilon]$$

avec $\alpha = \ln(2m-1)/\ln 2$.

Remarques. - Pour $m \in 2\mathbb{N}$, le théorème B est optimal car $-2^{1/(m-1)} \in M_m$. En effet, $-2^{1/(m-1)}$ est un point de Misiurewicz pour M_m.
On peut montrer tout aussi facilement que l'on a établi ce théorème, que si un itéré d'un point $z \in \mathbb{C}$ donné, sort du disque mentionné, alors le point en question n'appartient pas au M_m correspondant ; on obtient ainsi un critère de non-appartenance à M_m. Finalement, on a donc :

Théorème AB. - Pour $m > 1$,

$$D(m^{1/(m-1)}(1-m^{-1})) \subset M_m \subset D(2^{1/(m-1)})$$

En se plaçant dans la topologie de Hausdorff et en remplaçant m par $+\infty$ dans le théorème, on obtient le théorème de Hubbard.