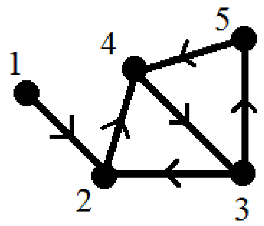
Réflexion sur la matrice d'incidence d'un graphe

N. Lygeros

Si nous considérons un graphe, il est possible de lui associer une matrice d'adjacence et s'il est orienté, nous pouvons lui associer la matrice d'incidence de la manière suivante :

$$\nabla := \begin{cases} \nabla_{ab} = -1 & \text{si } b \text{ est un point initial} \\ \nabla_{ab} = 1 & \text{si } a \text{ est un point initial} \\ \nabla_{ab} = 0 & \text{s'il n'y a pas d'arêtes} \end{cases}$$

Considérons l'exemple suivant :



$$\nabla = \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si nous considérons la matrice d'adjacence A comme un opérateur ou comme une forme quadratique, nous avons :

opérateur : $g = Af$ ou $g(i) = \sum_{i \sim j} f(j)$

Forme quadratique $f^T A f = \sum_{e_{ij}} f(i) f(j)$

Aussi nous pouvons définir le *mapping* suivant : $f \to \Delta f$
qui est connu en tant que *co-bounding mapping*

$$(\nabla f)(e_{ij}) = f(\mathrm{v}_j) - f(\mathrm{v}_i)$$

Autre calcul possible :

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(2) \\ f(4) - f(3) - f(2) \\ f(5) + f(2) - f(4) \\ f(3) - f(5) - f(2) \\ f(4) - f(3) \end{pmatrix}$$