Du Q-index à la géométrie du graphe

N. Lygeros

La Q-théorie correspond à l'utilisation de la matrice Laplacienne sans signe. Le Q-spectre d'un graphe G correspond à l'ensemble des valeurs propre du polynôme caractéristique de Q. Nous appellerons Q-index la plus grande de ses valeurs propres.

Dans un graphe connexe sans sommets de degré 1, avec Δ comme degré maximal d'un sommet. Le Q-index est minoré par

$$\Delta+1+\frac{1}{\Delta-1}$$

Cette remarque de Cvetkovic et Simic est optimal dans le cas d'un cycle.

Sans se restreindre à la Q-théorie mais en généralisant celle-ci à la Qc-théorie qui exploite les composantes connexes ces deux auteurs ont réussi à démontrer le théorème suivant.

Soit v, le nombre de sommet isolés.
Soit p, le nombre de chemins non triviaux
Soit e, le nombre de cycle pairs.
Soit t, le nombre de triangles
Soit u, le nombre de cycles impairs de longueur supérieur ou égale à 5
Soit s, le nombre de composantes isomorphes à l'étoile K1,3

Si nous considérons le Q-spectre et c, le nombre de composantes du graphe avec un Q-index qui ne dépasse pas le nombre 4 alors les nombres v,p,e,t,u et s définis ci-dessus sont déterminés de manière unique.

Cette approche montre d'une part l'efficacité de la Q-théorie mais aussi de l'importance du Q-index dans le théorème lorsque nous recherchons des éléments géométriques du graphe.