Notes sur la Q-théorie de Cvetkoni et Simic

N. Lygeros

Proposition : Un graphe G est régulier si et seulement si sa matrice Laplacienne sans signe a un vecteur propre dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

Calcul des valeurs propres sur les K_n et les C_n :

	$K_n (n \geq 2)$	$C_n (n \geq 3)$
Adjacence,	$n-1, (1)^{n-1}$	$2\cos\frac{\pi}{2^n} j,\ \ j \in \mathbb{N}_{n-1}$
Laplacienne	$0, n^{n-1}$	$2-2\cos\frac{\pi}{2^n} j,\ \ j \in \mathbb{N}_{n-1}$
Laplacienne sans signe	$2n-2, (n-2)^{n-1}$	$2+2\cos\frac{\pi}{2^n} j,\ \ j \in \mathbb{N}_{n-1}$

Proposition : Soit G un graphe régulier biparti de degré r. Alors le Q-spectre de G est symétrique par rapport au point r.

Proposition : Pour les graphes bipartis : $L_G(x) = Q_G(x)$

Théorème : Soit Q, le Laplacien sans signe d'un graphe G. L'entrée (i, j) de la matrice Q^K est égale au nombre de semi-arête de longueur k commençant au sommet i et se terminant au sommet j.

Théorème : Soit G un graphe connexe de diamètre D avec K Q-valeurs propres distinctes. Alors $D \leq K-1$

Théorème : Soit G un graphe avec un nombre fixé de sommets et d'arêtes, avec un Q-index maximal. Alors G ne contient pas, en tant que sous-graphe induit, les graphes suivants : $2K_2, P_4$ et C_4.

Théorème : Soit G un graphe connexe avec n sommets et m arêtes. Alors

$$q_1(G) \leq \sqrt{4m + 2(n-1)(n-2)}$$

Remarque : Pour un graphe complet cette inégalité devient égalité.

Théorème : Soit a la seconde plus petite valeur propre pour L, et q_2 la seconde plus grande valeur propre pour Q, d'un graphe G avec n sommets. Nous avons alors

$$a \leq q_2 + 2$$

et l'égalité a lieu si et seulement si le graphe G est complet.

Théorème : Dans les mêmes conditions que le théorème précédent mais cette fois avec un graphe non complet, nous avons :

$$a \leq q_2$$