Reflexions sur les Hv-groupes minimaux d'ordre 2

N. Lygeros

Les Hv-groupes vérifient l'axiome de reproduction, à savoir $\forall x \in H,\ xH = Hx = H$ et l'axiome d'associativité faible, à savoir $\forall (a,b,c) \in H^3,\ \ a(bc) \cap (ab)c \neq \varnothing$

Un Hv-groupe est minimal si l'effacement d'un élément d'un de ses produits amène à une structure qui ne soit pas un Hv-groupe. Considérons la table de Cayley d'un Hv-groupe d'ordre 2. Elle correspond à une matrice dont les éléments sont $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$. Pour une écriture plus compacte du Hv-groupe, nous écrivons donc $\left(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}\right)$.

Théorème : Les hypergroupes minimaux d'ordre 2 sont au nombre de 2. Il s'agit du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à savoir $(abba)$ et de l'hypergroupe $(aHHa)$.

Remarque : Ces deux objets sont incomparables puisqu'au sens de l'inclusion des produits nous avons $(abba) \not\subset (aHHb)$ et $(aHHb) \not\subset (abba)$. Nous remarquons que le groupe d'automorphisme du groupe est le groupe lui-même et que le groupe d'automorphisme de l'hypergroupe est trivial.

Théorème : Les Hv-groupes minimaux d'ordre 2 sont au nombre de 5. Il s'agit du groupe $(abba)$, de l'hypergroupe $(aHHb)$ et des trois Hv-groupes $(bHHa)$, $(HabH)$ et $(HbaH)$

Remarque : Ces cinq objets sont bien incomplets puisque nous n'avons aucune inclusion au sens des produits. Et les trois Hv-groupes supplémentaires ont tous un groupe d'automorphisme trivial.