Sur les bornes supérieures du rayon spectral laplacien des graphes

N. Lygeros, I. Pitault

Il est classique de considérer le rayon spectral d'une matrice d'adjacence comme un élément révélateur du graphe, en théorie spectrale des graphes. Cependant, il est possible d'étendre cette notion via la matrice laplacienne qui est définie comme la différence entre la matrice diagonale des degrés avec la matrice d'adjacence. De cette manière, nous pouvons définir le rayon spectral laplacien dont la majoration par une borne supérieure permet de contrôler l'ensemble du spectre de la matrice laplacienne associée au graphe considéré. Dans le cadre de cette recherche, nous avons des résultats tout au long des décennies qui ont permis d'améliorer cette borne dans le cadre général mais aussi particulier. En 1985, Anderson et Morley ont démontré que

$$\mu(G) \le \left\{ d_i + d_j : v_i v_j \in E \right\}$$

où d_i et d_j sont les degrés de deux sommets adjacents puisque $v_j v_i$ est une arête du graphe considéré. En 1998 Merris a amélioré ce résultat en introduisant la valeur m_i qui correspond à la moyenne de degrés des sommets adjacents au sommet v_i. Il a aussi obtenu le résultat suivant :

$$\mu(G) \le \max \left\{ d_i + m_i : v_i \in V(G) \right\}$$

En 2001, avec l'introduction de Δ et δ qui représentent respectivement le plus grand et le plus petit degré du graphe, Li et Pan ont démontré que :

$$\mu(G) \le \max \left\{ \sqrt{2d_i\left(d_i + m_i\right)} : v_i \in V(G) \right\}$$

mais aussi que

$$\mu(G) \le \sqrt{2\Delta^2 + 4m + 2\Delta(\delta - 1) - 2\delta(n-1)}$$

L'amélioration de ce dernier résultat a été obtenu en 2003 par Zhang et Luo via :

$$\mu(G) \le \Delta + \sqrt{2m + \Delta(\delta - 1) - \delta(n-1)}$$

Quant à l'amélioration du résultat antérieur, elle a été obtenu en 2004 par Zhang qui a démontré que :

$$\mu(G) \le \max \left\{ d_i + \sqrt{m_i d_i} : \mathrm{v}_i \in V(\mathrm{G}) \right\}$$

Par un calcul direct, Guo, Li et Shiu ont remarqué que ce résultat est meilleur que celui obtenu en 2007 par Shi à savoir :

$$\mu(G) \le \sqrt{2} \max \left\{ \sqrt{d_i^2 + \sum_{v_i v_j \in \sum} d_j} : \mathrm{v}_i \in V(\mathrm{G}) \right\}$$

Et ils ont montré de manière élémentaire qu'il améliore le précédent résultat via le lemme qui pour un graphe à n sommets et m arêtes dit que :

$$d_i m_i \le 2m - (n-1)\delta + (\delta - 1)\Delta$$