

Matrice Laplacienne et invariants topologiques

N. Lygeros, I. Pitault

Notations : $A(G)$: Matrice d'adjacence
 $D(G)$: Matrice diagonale des degrés
 $L(G)$: Matrice laplacienne

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

$$d(G) = (d_1, d_2, \dots, d_n)$$

Considérons le spectre de G , notons le $S(G)$

$$S(G) = (\lambda_1(G), \lambda_2(G), \dots, \lambda_n(G))$$

avec $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$

La matrice $L(G)$ est ainsi définie positive.

Comme la somme des colonnes de $L(G)$ est nulle, il est possible de définir le vecteur propre trivial de $L(G)$ qui correspond à un vecteur dont toutes les composantes sont égales à l'unité. Aussi nous avons $e_n L(G) = 0$ où e_n est le vecteur propre trivial.

Grâce à un ancien résultat de Schur, nous avons la première relation entre le spectre et l'invariant des degrés. En effet, nous avons l'inégalité suivante

$$\sum_{i=1}^t \lambda_i(G) \geq \sum_{i=1}^t d_i \quad 1 \leq t \leq n$$

Si $t = n$ alors nous avons l'égalité. Un autre théorème relie le spectre aux arbres co-variants du graphe initial. En effet, chaque composante de l'adjointe classique de la matrice $L(G)$ est égale au nombre d'arbres covariants $t(G)$. Ainsi l'examen double du polynôme caractéristique de G nous permet de montrer que

$$nt(G) = \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i(G)$$

Il est aussi intéressant de remarquer que le terme $\lambda_{n-1}(G)$ que nous appelons connectivité algébrique est strictement supérieur à zéro si et seulement si le graphe est connexe. Et ce sont les vecteurs propres de cette valeur qui sont nommés vecteurs de Fiedler.

Grone, Merris et Sunder ont montré les conséquences sur les valeurs propres de la Laplacienne, de l'ajout d'une arête sur le graphe considéré. Ainsi ils ont obtenu

$$\lambda_i(G+e) \geq \lambda_i(G) \geq 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

et

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(G+e) = 2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i(G)$$

Pour mieux analyser et interpréter ces phénomènes sur le spectre il est judicieux d'étiqueter le graphe avec les composantes de vecteur propre. Dans ce cas, nous avons une valuation selon la terminologie de Fiedler.

Comme les coefficients du polynôme caractéristique de $L(G)$ sont entiers, toute valeur propre rationnelle est un diviseur entier de $nt(G)$. Et si nous avons une valeur propre irrationnelle de multiplicité s alors sa conjuguée est aussi une valeur propre de multiplicité s . Ainsi si nous considérons K , le corps où se décompose $Det(xI_n - L(G))$ sur les rationnels, il existe un automorphisme α de K qui fixe Q , tel que $\alpha(\lambda) = \lambda^*$ où λ^* est la conjuguée de λ .

Par conséquent, si avec l'ajout d'une arête, nous avons seulement une valeur propre qui augmente de 2, alors cette valeur est nécessairement un entier.

Ainsi nous pouvons démontrer de manière élémentaire notre théorème.

Théorème : Si le spectre laplacien d'un graphe ne possède que des valeurs propres entières, alors l'ajout d'une arête au graphe initial augmentera une seule de ces valeurs propres de deux unités.