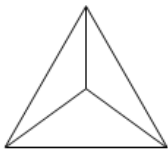


Application du principe de l'arête en théorie spectrale laplacienne

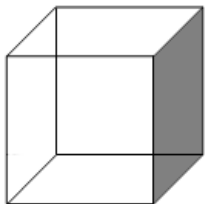
N. Lygeros, I. Pitault

T



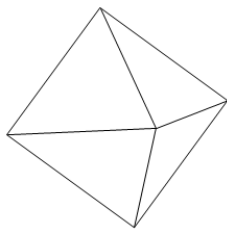
$$S(T) = (0, 4, 4, 4, 4)$$

C



$$S(C) = (0, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 6)$$

O



$$S(O) = (0, 4, 4, 4, 4, 6, 6)$$

Dans le cadre du cube et de l'octaèdre, il est possible d'ajouter une arête et comme les valeurs propres sont toutes entières, l'une d'entre elle sera augmentée de deux unités.

Considérons le cube. Nous avons :

$$S(C) = (0, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 6)$$

Comme la valeur propre 0 doit toujours être présente, nous avons à traiter uniquement les valeurs 2,4 et 6. Si l'ajout d'une arête modifie la valeur 2 nous avons

$$S(C + e) = (0, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 6)$$

Si l'ajout d'une arête modifie la valeur 6 nous avons

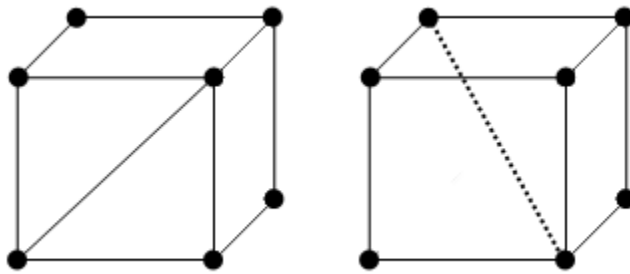
$$S(C + e) = (0, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 8)$$

Dans les deux cas nous avons donc des graphes qui ne sont pas des solides platoniciens mais qui ont une valeur propre égale à 4. Si l'ajout d'une arête modifie la valeur 4 nous avons

$$S(C + e) = (0, 2, 2, 2, 6, 6, 6, 6)$$

Nous remarquons que cela revient à changer la valeur de la multiplicité de la valeur propre 6.

(Figures)

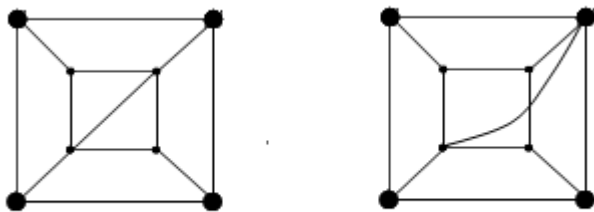


Type I

Type II

A partir d'un cube géométrique nous avons deux manières différentes d'ajouter une arête (voir Figures).

Il en est de même pour le cube topologique.



Type I

Type II

$$\sum_{i=1}^n d_i \leq \sum_{i=1}^l \lambda_i(G)$$

$$d(G) = (3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4)$$

$$d(C) = (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$$

$$S(C) = 0, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 6$$

$$\rightarrow (6, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 0) \text{ décroissant}$$

$$S(C + e) = (8, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 0) \quad \sum = 26 \quad \text{oui}$$

$$\text{ou } S(C + e) = (6, 6, 6, 6, 2, 2, 2, 0) \quad \text{mais } \sum = 30 \quad \text{non}$$

$$\text{ou } S(C + e) = (6, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 0) \quad \text{mais } \sum = 30 \quad \text{non}$$

$$d(C + e) = (4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3) \quad \sum = 26$$

8	4	4	6	4	4	4	4	4	4	4	0
	12			10							
		16			14						
						18					
							22				
								26			

Nous avons donc une seule possibilité

$$S(C + e) = (8, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 0)$$

Nous avons donc construit un graphe dont le spectre Laplacien possède une valeur propre égale à 4.

$$S(C + e) = (8, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 0)$$

Théorème : Considérons un graphe G dont le spectre Laplacien a uniquement des valeurs entières alors il existe une valeur propre non triviale dont la multiplicité est unique.

Démonstration : L'ajout d'une arête au graphe G modifie nécessairement une seule valeur propre de deux unités. Comme la somme totale des valeurs propres doit être augmentée uniquement de deux unités en raison de l'égalité avec la somme des degrés, cette valeur propre doit être unique.