Sur les hypergroupes de Marty-Moufang d'ordre 2

N. Lygeros

Rappelons les deux axiomes vérifiés par les hypergroupes de Marty-Moufang.

<u>Axiome de Reproduction</u> : $\forall\, x \in H$ : $x \cdot H = H \cdot x = H$

<u>Identité de Moufang</u> : $\forall\, (x, y, z) \in H^3$ : $x\,(\,(yz)\,x\,) = (xy)\,(zx)$

Comme les hypergroupes de Marty-Moufang généralisent les hypergroupes de Marty et par conséquent les groupes, nous en déduisons qu'à l'ordre 2, leur nombre est supérieur à 8 puisque nous avons le groupe cyclique et les hypergroupes qui sont au nombre de 7. De plus, comme les hypergroupes sont des quasigroupes qui vérifient l'identité de Moufang, leur nombre est nécessairement majoré par celui des quasigroupes qui est égal à 20.

Nous avons donc à partir de la classification de Vougiouklis des hypergroupes d'ordre 2, la liste suivante :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $G_1$ := | a, | b, | b, | a | Abélien |
| $H_1$ := | H, | a, | a, | b | Abélien |
| $H_2$ := | H, | H, | a, | b | |
| $H_3$ := | H, | a, | H, | b | |
| $H_4$ := | a, | H, | H, | b | Abélien |
| $H_5$ := | H, | H, | H, | a | Abélien |
| $H_6$ := | H, | H, | H, | b | Abélien |
| $H_7$ := | H, | H, | H, | H | Abélien |

Les autres hypergroupes de Marty-Moufang à savoir les stricts doivent vérifier par définition l'identité de Moufang et ne pas vérifier l'associativité. De plus l'identité de Moufang dégénère à cet ordre puisque nous n'avons que deux éléments possibles à savoir *a* et *b*.

Posons $x = z$ alors $\forall\,(x, y)$ on a : $x\,(\,(yx)\,x) = (xy)\,(xx)$

$$\begin{cases} \bullet\ yx = x \Rightarrow x\,(x \cdot x) = (xy)\,(xx) & \text{si } xx \neq H \Rightarrow xy = x = yx \\ \bullet\ yx = y \Rightarrow x\,(yx) = xy = (xy)\,(xx) & \text{si } xy \neq H \Rightarrow xx \text{ neutre à droite} \\ \bullet\ yx = H \Rightarrow x\,(Hx) = H = (xy)\,(xx) & \text{si } \begin{cases} xx \neq H \\ xy \neq H \end{cases} \end{cases}$$

- Si $xx = x$ alors nous obtenons un hypergroupe abélien
- Si $xx = y \Rightarrow \varnothing$

Ainsi si $xx = H$
- alors $yx = H$
- alors si $xy = H$ on a $yx = y$ et $x \subset yy$

Le cas strict engendre une contrainte qui ne permet pas la commutativité.
Nous nous retrouvons donc avec deux cas à savoir :

$M_1$ := H, a, H, H et $M_2$ := H, b, H, H

Au total nous avons donc 10 hypergroupes de Marty-Moufang d'ordre 2.