Introduction aux hypergroupes généralisés de Marty-Moufang

N. Lygeros

(1) Hypergroupe de Marty : $\left| \begin{array}{l} \forall\, x \in H : \quad xH = Hx = H \\ \forall\, (x,y,z) \in H^3 : \quad x(yz) = (xy)z \end{array} \right.$

(2) H_v-groupe de Vougiouklis : $\left| \begin{array}{l} \forall\, x \in H : \quad xH = Hx = H \\ \forall\, (x,y,z) \in H^3 : \quad x(yz) \cap (xy)z \neq \varnothing \end{array} \right.$

(3) Hypergroupe de Marty-Moufang : $\left| \begin{array}{l} \forall\, x \in H : \quad xH = Hx = H \\ \forall\, (x,y,z) \in H^3 : \quad x((yx)z) = (xy)(xz) \end{array} \right.$

(4) Hypergroupe généralisé de Marty-Moufang : $\left| \begin{array}{l} \forall\, x \in H : \quad xH = Hx = H \\ \forall\, (x,y,z) \in H^3 : \quad x((yx)z) \cap (xy)(xz) \neq \varnothing \end{array} \right.$

Par définition nous avons de manière élémentaire :

$$(1) \subseteq (2) \quad \text{et} \quad (3) \subseteq (4).$$

De plus, comme l'identité de Moufang est plus faible que l'associativité, nous avons aussi :

$$(1) \subseteq (3).$$

Soit P la propriété $\forall\, (x,y,z) \in H^3 : \quad x(yz) = (xy)z$
et Q la propriété $\forall\, (x,y,z) \in H^3 : \quad x((yx)z) = (xy)(xz)$

Alors $\neg P$: $\exists\, (x,y,z) \in H^3 : \quad x(yz) \neq (xy)z$
et $\neg Q$: $\exists\, (x,y,z) \in H^3 : \quad x((yx)z) \neq (xy)(xz)$

Comme $P \Rightarrow Q$ nous avons aussi $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

$\neg P$ peut aussi s'interpréter comme :

$$\{\, x(yz) \neq x(yz) \cap (xy)z \neq \varnothing \quad \text{ou} \quad x(yz) \cap (xy)z = \varnothing \,\}$$

Et $\neg Q$ comme :

$$\{\, x((yx)z) \neq x((yx)z) \cap (xy)(xz) \neq \varnothing \quad \text{ou} \quad x((yx)z) \cap (xy)(xz) = \varnothing \,\}$$

Ainsi les Hv-groupes de Vougiouklis sont une combinaison de P et une partie de $\neg P$ tandis que les hypergroups généralisés de Marty-Moufang sont une combinaison de Q et une partie de $\neg Q$. Ce sont donc deux généralisations incomparables en termes d'inclusion.