Φασματική ενέργεια γραφημάτων

Ν. Λυγερός

Αν θεωρήσουμε τις ιδιοτιμές ενός πίνακα γειτνίασης που αντιπροσωπεύει ένα γράφημα ως βασικά συστατικά και του γραφήματος, μπορούμε να ορίσουμε και τη φασματική ενέργεια αυτού του γραφήματος, αφού υπάρχει πάντα το άθροισμα των απολύτων τιμών των ιδιοτιμών. Έστω λοιπόν αυτές οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_4$, η ενέργεια γράφεται με τον εξής τρόπο: $E(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε και την ενέργεια του Laplace του πίνακα αλλά και του θετικού Laplace. Έτσι έχουμε με $\mu_1, \ldots, \mu_4$ ιδιοτιμές του $L(G)$ και $\mu_1^+, \mu_2^+, \ldots, \mu_4^+$ ιδιοτιμές του $L^+(G)$ τους εξής ορισμούς:

$$L\big(E(G)\big) = \sum_{i=1}^{n} \left|\mu_i - \frac{2m}{n}\right|$$

και

$$L\big(E^+(G)\big) = \sum_{i=1}^{n} \left|\mu_i + \frac{2m}{n}\right|$$

Σε αυτό το πλαίσιο, έχουμε το βασικό θεώρημα

$$E(C) \le E(A) + E(B)$$

$$C = A + B$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε τις ανισότητες:

$$L\big(E(G)\big) \le E(G) + \sum_{i=1}^{n} \left|d_i - \frac{2m}{n}\right|$$

και

$$L\big(E^+(G)\big) \le E(G) + \sum_{i=1}^{n} \left|d_i - \frac{2m}{n}\right|$$

Αν επιπλέον ορίσουμε το δείκτη Zagreb ενός γραφήματος ως:

$$Z_g(G) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

Έχουμε το εξής θεώρημα για ένα (n, m) γράφημα.

$$L\big(E^+(G)\big) \le E(G) + \sqrt{n \cdot Z_g(G) - 4m^2}$$

και

$$L\big(E^{+}(G)\big) \leq 4m\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

Όταν το γράφημα είναι bipartite ή regular

$$L\big(E^{+}(G)\big) = L\big(E(G)\big)$$

Στις άλλες περιπτώσεις γνωρίζουμε γραφήματα όπου έχουμε ανισότητα.

Όμως ο χαρακτηρισμός των γραφημάτων που ικανοποιούν τη συνθήκη:

$L\big(E^{+}(G)\big) = L\big(E(G)\big)$ είναι ανοιχτό πρόβλημα.