$$\sum_{\rho\epsilon\Pi}\frac{1}{\rho} > +\infty$$

Ν. Λυγερός

Αν και υπάρχει παραδοσιακός τρόπος να αποδείξουμε αυτό το αποτέλεσμα, παραδείγματος χάρη με τη μέθοδο του Euler, είναι ενδιαφέρον να αναλύσουμε την προσέγγιση του Erdős.

Έστω ότι

$$\sum_{p\epsilon\Pi}\frac{1}{p} < A < +\infty$$

Τότε υπάρχει K τέτοιο ώστε

$$\sum_{\substack{p\epsilon\Pi \\ p\geq K}}\frac{1}{p} < \frac{1}{2}$$

Έστω N_S το πλήθος των αριθμών που είναι μικρότεροι του N και δεν έχουν πρώτο διαιρέτη μεγαλύτερο του K.

Έχουμε λοιπόν N-N_S αριθμούς που διαιρούνται από τουλάχιστον ένα από τα p_i.

Κατά συνέπεια έχουμε:

$$N - N_S \leq N\left(\sum_{p_i\geq K}\frac{1}{p_i}\right) < N/2$$

Αν όμως ο n μικρότερος του N δεν έχει πρώτους διαιρέτες μεγαλύτερους του K, μπορούμε να τον εκφράσουμε με τον εξής τρόπο: $n=ab^2$, όπου ο a δεν διαιρείται από τετράγωνο. Έτσι ο αριθμός a είναι της μορφής: Πq_i με q_i πρώτοι αριθμοί όλοι διαφορετικοί και μικρότεροι του K. έχουμε τώρα στο μέγιστο 2^K διαφορετικές τιμές για τον αριθμό α.

Κι όπως $b^2 \leq N$, έχουμε το μέγιστο $\sqrt{N}$ διαφορετικές τιμές για το b.

Αυτό σημαίνει ότι: $N_S \leq 2^K\sqrt{N}$.

Α πάρουμε λοιπόν $N>4^{K+1}$ για να έχουμε $N_S<N/2$ επειδή $\sqrt{N} > 2^{K+1}$ και άρα

$2^K\sqrt{N} < \frac{\sqrt{N}}{2}\sqrt{N} = N/2$, καταλήγουμε σε άτοπο αφού:

$$(N - N_S) + N_S = N < N/2 + N/2$$

Έτσι αποδείξαμε με κομψό τρόπο ακολουθώντας τη μεθοδολογία του Erdős ότι

$$\sum_{p \in \Pi} \frac{1}{p} > +\infty$$