

DYNAMIQUE DU PROBLÈME $3x + 1$ SUR LA DROITE RÉELLE

NIK LYGEROS ET OLIVIER ROZIER

RÉSUMÉ. Le *problème* $3x + 1$ est une conjecture réputée difficile au sujet d'un algorithme pourtant très simple sur les entiers positifs. Une approche possible est de sortir du cadre discret. M. Chamberland a ainsi utilisé une extension analytique sur la demi-droite \mathbb{R}^+ . Nous complétons ses résultats sur la dynamique des points critiques et obtenons une nouvelle formulation du problème $3x + 1$. Nous explicitons alors les liens avec la question de l'existence d'intervalles errants. Puis nous étendons l'étude de la dynamique à la demi-droite \mathbb{R}^- , en relation avec le *problème* $3x - 1$. Enfin nous analysons le comportement moyen des itérations réelles au voisinage de $\pm\infty$ et présentons une méthode basée sur un argument heuristique de R. E. Crandall dans le cas discret. Il suit que la vitesse moyenne des itérations réelles est proche de $(2 + \sqrt{3})/4$ sous condition de distribution uniforme modulo 2.

ABSTRACT. The $3x + 1$ *problem* is a difficult conjecture dealing with quite a simple algorithm on the positive integers. A possible approach is to go beyond the discrete nature of the problem, following M. Chamberland who used an analytic extension to the half-line \mathbb{R}^+ . We complete his results on the dynamic of the critical points and obtain a new formulation the $3x + 1$ problem. We clarify the links with the question of the existence of wandering intervals. Then, we extend the study of the dynamic to the half-line \mathbb{R}^- , in connection with the $3x - 1$ *problem*. Finally, we analyze the mean behaviour of real iterations near $\pm\infty$ and present a method based on a heuristic argument by R. E. Crandall in the discrete case. It follows that the average growth rate of the iterates is close to $(2 + \sqrt{3})/4$ under a condition of uniform distribution modulo 2.

1. INTRODUCTION

Généralement attribué à Lothar Collatz, le *problème* $3x + 1$ est aussi appelé *conjecture de Syracuse*, en référence à l'Université du même nom. Il se rapporte à la fonction T définie sur les entiers positifs par

$$(1.1) \quad T(n) := \begin{cases} (3n + 1)/2 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ n/2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

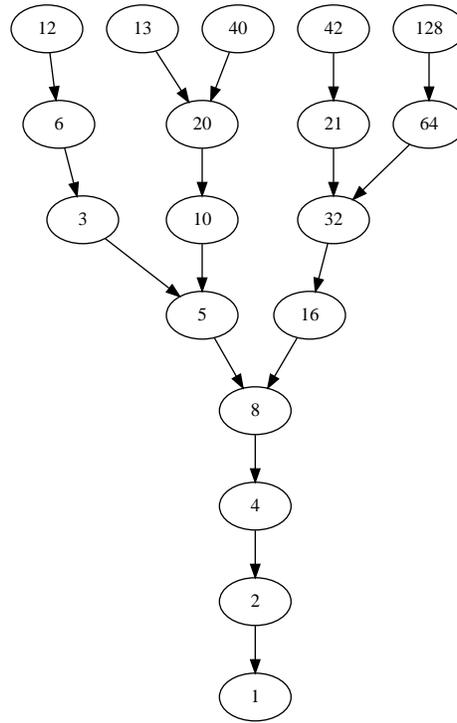


FIGURE 1. Arbre inverse du problème $3x + 1$ représentant l'ensemble des antécédents de 1 sur sept itérations.

Il s'agit de prouver que toute itération de T à partir d'un entier positif n arbitraire conduit nécessairement à la valeur 1. Cette valeur est cyclique de période 2 : $T(T(1)) = 1$.

Conjecture 1.1. Problème $3x + 1$

Pour tout entier $n > 0$, il existe un entier $k \geq 0$ tel que $T^k(n) = 1$.¹

La figure 1 représente toutes les orbites qui aboutissent à 1 en un maximum de sept itérations.

Le problème $3x + 1$ se ramène entièrement aux deux conjectures 1.2 et 1.3 sur la dynamique de la fonction T .

Conjecture 1.2. Absence de trajectoires divergentes

Tout entier positif n a une orbite $\{T^i(n)\}_{i=0}^{\infty}$ bornée.

Conjecture 1.3. Absence de cycles non-triviaux

Il n'existe pas d'entiers $n > 2$ et $k > 0$ tels que $T^k(n) = n$.

La conjecture 1.2 implique que tout entier positif a une orbite cyclique à partir d'un certain rang par itération de T . La conjecture 1.3 stipule que le seul cycle possible est le cycle $(1, 2)$.

1. On note $T^k(n)$ le $k^{\text{ème}}$ itéré de T .

Généralement, on convient de stopper les itérations lorsque la valeur 1 est atteinte. Ainsi on appelle *temps de vol* de n le plus petit entier k tel que $T^k(n) = 1$.

T. Oliveira e Silva a vérifié par des calculs sur ordinateur que tout entier positif $n < 5 \cdot 2^{60}$ a un temps de vol fini [7, 10].

Les conjectures 1.2 et 1.3, bien qu'abondamment étudiées, ne sont toujours pas résolues. On pourra se référer aux ouvrages de J. Lagarias [7] et G.J. Wirsching [11] pour une synthèse détaillée des résultats partiels relatifs au problème $3x + 1$ et diverses variantes.

R. E. Crandall [4] a avancé un argument heuristique basé sur l'idée de promenade aléatoire : si l'on considère uniquement la sous-suite des itérés impairs d'un entier n assez grand, on s'attend à ce que l'ensemble des rapports possibles entre deux termes successifs impairs, à savoir $3/2, 3/4, 3/8, \dots$, aient pour probabilités respectives les valeurs $1/2, 1/4, 1/8, \dots$. On obtient comme rapport moyen la valeur $3/4$. Ceci découle de l'égalité

$$(1.2) \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{8}} \cdots = \frac{3}{4}.$$

Cet argument plaide fortement en faveur de la conjecture 1.2.

Dans le cadre de notre étude, nous appellerons *vitesse moyenne* d'une séquence finie $\{n, T(n), \dots, T^k(n)\}$ la quantité $(T^k(n)/n)^{1/k}$.

Un raisonnement analogue [2] à celui de Crandall suggère que la vitesse moyenne d'une séquence arbitraire non-cyclique a statistiquement une valeur proche de $\sqrt{3}/2 \simeq 0.866 \dots$, moyenne géométrique de $1/2$ et $3/2$. En effet, la croissance d'une séquence dépend principalement de la parité des itérés successifs. Or, on s'attend à ce que les parités soient équiréparties sur un grand nombre d'itérations.

Ainsi le temps de vol k d'un entier n serait tel que $(1/n)^{1/k} \approx \sqrt{3}/2$ et l'on obtiendrait la valeur moyenne

$$k \approx \frac{2 \ln n}{\ln \left(\frac{4}{3}\right)}$$

en l'absence de cycle [7, p. 7].

Ces estimations sont confortées par les calculs numériques. Il semble donc qu'un tel raisonnement permette de saisir l'essentiel de la dynamique asymptotique du problème $3x + 1$.

2. EXTENSION SUR LES RÉELS POSITIFS

Une approche possible du problème $3x + 1$ est de sortir du cadre discret et d'étendre T par une fonction analytique sur l'ensemble des nombres réels [3]

ou complexes [5, 8]. Nous opterons pour l’extension réelle² qui nous paraît la plus naturelle, définie par l’équation (2.1) ci-après, et nous expliciterons les liens étroits qu’entretiennent la dynamique sur les réels et le problème $3x + 1$.

Chamberland [3] a étudié la dynamique sur la demi-droite \mathbb{R}^+ de la fonction analytique

$$(2.1) \quad f(x) := x + \frac{1}{4} - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \cos(\pi x)$$

qui vérifie $f(n) = T(n)$ pour tout entier n , et $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. Il a ainsi obtenu plusieurs résultats significatifs :

(2.2) Le point fixe 0 est attractif ainsi que les cycles $\mathcal{A}_1 := \{1, 2\}$ et $\mathcal{A}_2 := \{1.192\dots, 2.138\dots\}$ de période 2.

(2.3) La dérivée *Schwartzienne* de f est négative sur \mathbb{R}^+ .

(2.4) Les intervalles $[0, \mu_1]$ et $[\mu_1, \mu_3]$ sont invariants par f , où $\mu_1 = 0.277\dots$ et $\mu_3 = 2.445\dots$ sont des points fixes répulsifs.

(2.5) Tout cycle d’entiers positifs est attractif.

(2.6) Il existe des orbites monotones non-bornées sur \mathbb{R}^+ .

Par ailleurs, il énonce la conjecture “Stable Set” [3] ci-dessous :

Conjecture 2.1. Cycles attractifs sur \mathbb{R}^+

La fonction f n’admet aucun cycle attractif sur l’intervalle $[\mu_3, +\infty)$.

Une conséquence immédiate de (2.5) est que la conjecture 2.1 entraîne la conjecture 1.3 du problème $3x + 1$.

Puis, il définit l’ensemble des orbites non-bornées

$$(2.7) \quad U_f^\infty := \left\{ x \in \mathbb{R}^+ : \limsup_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = \infty \right\}.$$

Le résultat (2.6) prouve que U_f^∞ est infini, et l’on démontre que U_f^∞ contient un ensemble de Cantor dans chaque intervalle $[n, n+1]$ pour tout entier $n \geq 2$ [8]. Il suit que U_f^∞ n’est pas dénombrable.

Conjecture 2.2. Orbites non-bornées sur \mathbb{R}^+

L’ensemble U_f^∞ est d’intérieur vide.

La conjecture 2.2 est une formulation faible de la conjecture “Unstable Set” [3]. Nous allons montrer qu’elle a des liens logiques avec le problème $3x + 1$.

² Le deuxième auteur (O. Rozier) avait antérieurement suggéré l’étude de l’extension (2.1) dans le plan complexe et obtenu des représentations graphiques des bassins d’attraction [1].

Lemme 2.3. Soit $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ l'ensemble des points critiques de f dans \mathbb{R}^+ , ordonnés de telle sorte que $0 < c_1 < c_2 < \dots$.

Alors on a

$$n - \frac{1}{\pi^2 n} < c_n < n, \text{ si } n \text{ est pair ;}$$

$$n < c_n < n + \frac{3}{\pi^2 n}, \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Démonstration. (indications) Soit n un entier positif. On a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cos(\pi x) + \pi \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \sin(\pi x)$$

et on vérifie facilement que $n - \frac{1}{2} < c_n < n$ si n est pair, et $n < c_n < n + \frac{1}{2}$ si n est impair.

De plus, on a toujours $f'(n) > 0$ et on montre que

$$f' \left(n - \frac{1}{\pi^2 n} \right) < \frac{(20 - 6\pi^2 n) n + 1}{24\pi^2 n^3} < 0, \text{ si } n \text{ est pair,}$$

$$f' \left(n + \frac{3}{\pi^2 n} \right) < \frac{(18 - 6\pi^2 n) n + 9}{8\pi^2 n^3} < 0, \text{ si } n \text{ est impair,}$$

en utilisant les encadrements $1 - \frac{t^2}{2} < \cos t < 1$ et $t - \frac{t^3}{6} < \sin t < t$ pour $0 < t < 1$. \square

Lemme 2.4. On considère la famille d'intervalles $J_n^a := [n, n + \frac{a}{\pi^2 n}]$ pour tout entier $n > 0$ et tout réel a tel que $\frac{27}{8} < a < 6$.

Alors on a $f(J_n^a) \subset J_{f(n)}^a$ pour tout entier n assez grand.

Si de plus $a = \frac{7}{2}$, alors l'inclusion est vraie pour tout $n > 0$.

Démonstration. Soit un entier $n > 0$ et un réel a tel que $\frac{27}{8} < a < 6$.

1^{er} cas : n est pair, $f(n) = \frac{n}{2}$ et f est croissante sur J_n^a . On vérifie alors que

$$f \left(n + \frac{a}{\pi^2 n} \right) \leq f(n) + \frac{a}{\pi^2 f(n)} + A \cdot B$$

avec

$$A = \frac{a}{8\pi^4 n^3} \text{ et } B = \pi^2 n (2(a - 6)n + a) + 2a^2$$

en utilisant l'inégalité $1 - \cos t < \frac{t^2}{2}$ pour $0 < t < 1$. Comme $a - 6 < 0$, il est clair que $A \cdot B < 0$ pour n suffisamment grand.

Si de plus $a = \frac{7}{2}$, alors $B \leq \frac{49}{2} - 13\pi^2 < 0$ pour tout n .

2^e cas : n est impair, $f(n) = \frac{3n+1}{2}$ et f est croissante sur $[n, c_n]$ et décroissante sur $[c_n, n + \frac{a}{\pi^2 n}]$. On vérifie alors que

$$f \left(n + \frac{a}{\pi^2 n} \right) \geq f(n) - A \cdot B$$

A et B étant défini comme précédemment, donc $A \cdot B < 0$ pour n suffisamment grand. Si de plus $a = \frac{7}{2}$, alors $A \cdot B < 0$ pour tout $n \geq 3$, et dans le cas $n = 1$, on a

$$f\left(1 + \frac{7}{2\pi^2}\right) = 2.013\dots > f(1).$$

D'après le lemme 2.3, on a $c_n = n + \frac{b}{\pi^2 n}$ avec $0 < b < 3$. Il vient

$$f(c_n) - f(n) \leq \frac{3b}{2\pi^2 n} - \frac{n}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{b}{\pi n}\right)\right)$$

puis en utilisant l'inégalité $1 - \cos t > \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24}$ pour $0 < t < 1$,

$$f(c_n) - f(n) < \frac{b(6-b)}{4\pi^2 n} + \frac{b^4}{48\pi^4 n^3} \leq \frac{9}{4\pi^2 n} + \frac{27}{16\pi^4 n^3}.$$

On obtient

$$f(c_n) < f(n) + \frac{a}{\pi^2 f(n)} + \frac{C}{D}$$

avec

$$C = 4\pi^2 n^2 ((27 - 8a)n + 9) + 81n + 27 \text{ et } D = 16\pi^4 n^3 (3n + 1).$$

On voit que $C < 0$ pour n suffisamment grand. Si de plus $a = \frac{7}{2}$ et $n \geq 11$, on a alors

$$C = 4\pi^2 n^2 (9 - n) + 81n + 27 < 0$$

et dans les cas où $n = 1, 3, 5, 7$ ou 9 , on vérifie numériquement que

$$f(c_n) - f(n) - \frac{7}{(3n+1)\pi^2} < 0$$

en utilisant les valeurs $c_1 = 1.180938\dots$, $c_3 = 3.084794\dots$, $c_5 = 5.054721\dots$, $c_7 = 7.040311\dots$ et $c_9 = 9.031889\dots$

□

On déduit du lemme 2.4 un lien logique entre les conjectures 1.2 et 2.2 :

Théorème 2.5. *La conjecture 2.2 implique la conjecture 1.2 (absence d'orbites non-bornées) du problème $3x + 1$.*

Démonstration. Supposons que la conjecture 2.2 soit vraie et que la conjecture 1.2 soit fautive. Alors il existe un entier positif n_0 tel que $\limsup_{k \rightarrow \infty} f^k(n_0) = \infty$. D'après le lemme 2.4, une simple récurrence donne $f^k\left(J_{n_0}^{\frac{7}{2}}\right) \subset J_{f^k(n_0)}^{\frac{7}{2}}$ pour tout entier $k \geq 0$. Donc l'ensemble U_f^∞ contient l'intervalle $J_{n_0}^{\frac{7}{2}}$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse que U_f^∞ soit d'intérieur vide. □

3. DYNAMIQUE DES POINTS CRITIQUES

Les résultats (2.3) et (2.5) entraînent que le bassin d'attraction immédiat de tout cycle d'entiers strictement positifs contient au moins un point critique [3]. Pour cette raison, Chamberland a effectué des calculs numériques relatifs aux orbites des points critiques c_n pour $n \leq 1000$. Il énonce la conjecture "Critical Points" ci-dessous :

Conjecture 3.1. Points critiques

Tous les points critiques c_n , $n > 0$, sont attirés par l'un des cycles \mathcal{A}_1 ou \mathcal{A}_2 .

Nous complétons ici les résultats numériques de Chamberland. Une précision de 1500 chiffres décimaux en virgule flottante est requise pour le calcul de certaines orbites (c_{646} par exemple). Nous avons vérifié nos résultats avec deux logiciels différents, Mathematica et Maple.

D'après nos calculs, les cycles \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 attirent tous les points critiques c_n pour $n \leq 2000$. Plus précisément, c_n est attiré par \mathcal{A}_2 pour $n = 1, 3, 5, 382, 496, 502, 504, 508, 530, 550, 644, 646, 656, 666, 754, 830, 874, 1078, 1150, 1214, 1534, 1590, 1598, 1614, 1662, 1854$, et par \mathcal{A}_1 pour toutes les autres valeurs de $n \leq 2000$. Nous avons observé que l'orbite de c_n est toujours proche de l'orbite de n , sauf pour $n \equiv -2 \pmod{64}$ et pour $n=54, 334, 338, 366, 390, 442, 444, 470, 484, 486, 496, 500, \dots$

Les résultats numériques suggèrent la conjecture suivante ⁴ :

Conjecture 3.2. Points critiques d'ordre impair

Les points critiques c_n sont attirés par le cycle $\mathcal{A}_1 = \{1, 2\}$ pour tout entier $n \geq 7$ impair.

Nous montrons à présent que la conjecture 3.2 suffit pour reformuler complètement le problème $3x + 1$.

Théorème 3.3. *Soit un entier impair $n \geq 7$ dont l'orbite contient 1. Alors le point critique c_n est attiré par le cycle \mathcal{A}_1 .*

Démonstration. Considérons un entier impair $n \geq 7$ dont l'orbite contient 1. La construction de l'arbre des orbites inverses de 1, représenté sur la figure 1, montre que l'orbite de n contient l'un des entiers 12, 13, 16 ou 40. On déduit de règles itératives modulo 3 sur les entiers que les antécédents de 12 sont des entiers pairs. Il vient que $f^k(n) = 13, 16$ ou 40 pour un entier $k \geq 0$. Les lemmes 2.3 et 2.4 entraînent que c_n appartient à $J_n^{\frac{7}{2}}$ et $f^k(c_n)$ se trouve dans $J_{13}^{\frac{7}{2}} \cup J_{16}^{\frac{7}{2}} \cup J_{40}^{\frac{7}{2}}$.

1^{er} cas : $f^k(n) = 13, f^k(c_n) \in J_{13}^{\frac{7}{2}}$. La séquence des itérés de $f^k(n)$ est $13 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

3. En gras les valeurs déjà obtenues par Chamberland.

4. Dans [5], une conjecture analogue avec davantage d'hypothèses est formulée relativement à une autre extension de la fonction T sur les réels.

Soit m un entier pris dans cette séquence. La fonction f est unimodale sur $J_m^{\frac{7}{2}}$ avec un maximum en c_m lorsque m est impair, et strictement croissante lorsque m est pair. Ce comportement permet de déterminer les images successives de $J_{13}^{\frac{7}{2}}$ en fonction de $c_{13} = 13.022478\dots$

$$f\left(J_{13}^{\frac{7}{2}}\right) = [20, f(c_{13})]$$

$$f^3\left(J_{13}^{\frac{7}{2}}\right) = [5, f^3(c_{13})]$$

avec $f^3(c_{13}) = 5.0249\dots < c_5 = 5.0547\dots$

$$f^7\left(J_{13}^{\frac{7}{2}}\right) = [1, f^7(c_{13})]$$

avec $f^7(c_{13}) = 1.0184\dots$

De plus la fonction f^2 est strictement croissante sur l'intervalle $(1, c_1)$ avec une unique point fixe $x_1 = 1.023686\dots$ qui est répulsif. Il suit que l'intervalle $[1, x_1)$ fait partie du bassin d'attraction immédiat du cycle \mathcal{A}_1 et que c_n est attiré par \mathcal{A}_1 .

2^e cas : $f^k(n) = 16$, $f^k(c_n) \in J_{16}^{\frac{7}{2}}$. On a la séquence $16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Comme précédemment, on obtient l'image

$$f^4\left(J_{16}^{\frac{7}{2}}\right) = \left[1, f^4\left(16 + \frac{7}{32\pi^2}\right)\right]$$

avec $f^4\left(16 + \frac{7}{32\pi^2}\right) = 1.0227\dots < x_1$. Donc c_n est attiré par \mathcal{A}_1 .

3^e cas : $f^k(n) = 40$, $f^k(c_n) \in J_{40}^{\frac{7}{2}}$, et la séquence des itérés est $40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. De la même manière, on itère les images successives

$$f^3\left(J_{40}^{\frac{7}{2}}\right) = \left[5, f^3\left(40 + \frac{7}{80\pi^2}\right)\right]$$

avec $f^3\left(40 + \frac{7}{80\pi^2}\right) = 5.0118\dots < c_5 = 5.0547\dots$,

$$f^7\left(J_{40}^{\frac{7}{2}}\right) = \left[1, f^7\left(40 + \frac{7}{80\pi^2}\right)\right]$$

avec $f^7\left(40 + \frac{7}{80\pi^2}\right) = 1.0047\dots < x_1$. Ainsi c_n est attiré par \mathcal{A}_1 dans tous les cas. \square

Remarque 3.1. Dans cette démonstration, il n'est pas possible de fusionner les cas 1 et 3 en partant de l'entier 20 car $f^6\left(J_{20}^{\frac{7}{2}}\right) = [1, f^6\left(20 + \frac{7}{40\pi^2}\right)] = [1, 1.023691\dots]$ n'est pas inclus (de très peu) dans le bassin d'attraction de \mathcal{A}_1 délimité par $x_1 = 1.023686\dots$

Corollaire 3.4. *La conjecture 3.2 est logiquement équivalente au problème $3x + 1$.*

Démonstration. Une conséquence immédiate du théorème 3.3 est que la conjecture 1.1 (problème $3x + 1$) implique la conjecture 3.2 sur la dynamique des points critiques d'ordre impair. On démontre à présent la réciproque.

Considérons un entier $n > 0$. Son orbite contient au moins un entier impair $f^{k_1}(n)$, $k_1 \geq 0$. Si $f^{k_1}(n) \leq 5$, alors l'orbite de n contient le point 1 (cf. figure 1). On considère à présent le cas $f^{k_1}(n) \geq 7$.

Supposons que la conjecture 3.2 soit vraie. Alors il existe un entier positif k_2 tel que

$$f^{k_2} \left(c_{f^{k_1}(n)} \right) < 2.$$

De plus, le lemme 2.4 donne par récurrence l'inclusion

$$f^{k_2} \left(c_{f^{k_1}(n)} \right) \in J_{f^{k_1+k_2}(n)}^{\frac{7}{2}}.$$

Il découle l'égalité

$$f^{k_1+k_2}(n) = 1.$$

□

4. INTERVALLES ERRANTS

L'existence d'*intervalles errants* [9] dans la dynamique de l'extension f est une question ouverte avec d'importantes implications pour le problème $3x + 1$.

Conjecture 4.1. Absence d'intervalles errants

La fonction f n'admet pas d'intervalles errants dans \mathbb{R}^+ .

Elle est au cœur du théorème ci-dessous.

Théorème 4.2. *On a les relations suivantes entre conjectures :*

- (a) *la conjecture 2.2 entraîne la conjecture 4.1,*
- (b) *la conjecture 4.1 entraîne la conjecture 1.2.*

Démonstration. Par l'absurde.

(a) Supposons que la conjecture 2.2 soit vraie et que la conjecture 4.1 soit fautive. Cela implique que la fonction f admette une famille d'intervalles errants sur une partie bornée de \mathbb{R}^+ . Or ce serait en contradiction avec la propriété (2.3) : la dérivée Schwartzienne de f est négative sur \mathbb{R}^+ .

(b) Supposons que la conjecture 1.2 soit fautive. Alors il existe un entier positif n tel que $\lim_{i \rightarrow \infty} f^i(n) = +\infty$. D'après le lemme 2.4, les intervalles $\left\{ f^i \left(J_n^{7/2} \right) \right\}_{i=0}^{\infty}$ sont inclus dans les intervalles $\left\{ J_{f^i(n)}^{7/2} \right\}_{i=0}^{\infty}$, deux à deux disjoints. Il s'agit d'une famille d'intervalles errants. □

Une synthèse des liens logiques entre conjectures est donnée en figure 2.

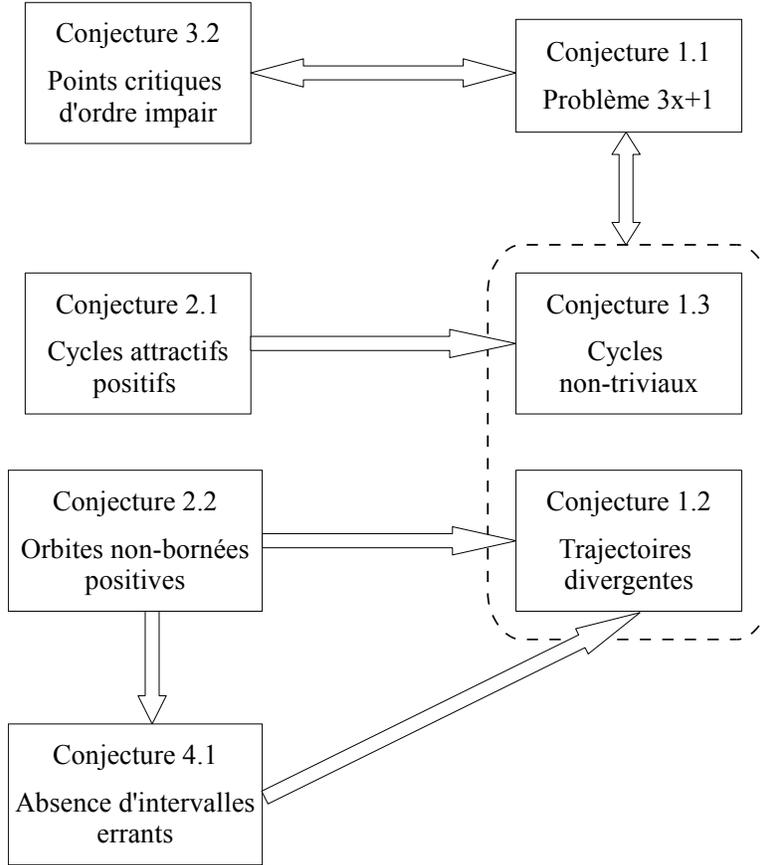


FIGURE 2. Liens logiques entre conjectures. La partie gauche concerne le cadre continu \mathbb{R}^+ et la partie droite le cadre discret \mathbb{Z}^+ .

5. EXTENSION SUR LES RÉELS NÉGATIFS

L'ensemble \mathbb{R}^- des réels négatifs est également invariant par la fonction f définie par (2.1). La dynamique sur les entiers négatifs est alors identique, au signe près, à celle de la fonction “ $3x-1$ ”, notée U et définie sur les entiers positifs par

$$(5.1) \quad U(n) := \begin{cases} (3n-1)/2 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ n/2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, on a la relation de conjugaison $f(-n) = -U(n)$ pour tout entier n positif. La fonction U admet le point fixe 1 et a deux cycles connus : $\{5, 7, 10\}$ de période 3 et $\{17, 25, 37, 55, 82, 41, 61, 91, 136, 68, 34\}$ de période 11. Cela conduit à formuler le “*problème $3x-1$* ” :

Conjecture 5.1. Problème $3x - 1$

Pour tout entier $n > 0$, il existe un entier $k \geq 0$ tel que $U^k(n) = 1, 5$ ou 17 .

Les valeurs de f sur \mathbb{R}^+ et $(-\infty, -1]$ sont liées par l'équation fonctionnelle

$$(5.2) \quad f(x) - f(-1 - x) = 2x + 1$$

de sorte que les points fixes de f sur $(-\infty, -1]$ sont exactement les points $\nu_i := -1 - \mu_i$, où $\{\mu_i\}_{i=0}^\infty$ désigne l'ensemble des points fixes de f sur \mathbb{R}^+ , $\mu_0 = 0 < \mu_1 < 1 < \mu_2 < 2 < \dots$

Néanmoins, la dynamique de f sur \mathbb{R}^- diffère partiellement de celle que l'on a pu décrire sur \mathbb{R}^+ , comme le montrent les propriétés (5.3) à (5.7).

(5.3) Les points fixes 0 et $\nu_1 = -1.277\dots$ sont attractifs, ainsi que les cycles

$$\mathcal{B}_1 := \{x, f(x), f^2(x)\} \text{ où } x = -5.046002\dots,$$

$$\mathcal{B}_2 := \{x, f(x), f^2(x)\} \text{ où } x = -4.998739\dots,$$

$$\mathcal{B}_3 := \{x, f(x), \dots, f^{10}(x)\} \text{ où } x = -17.002728\dots,$$

$$\mathcal{B}_4 := \{x, f(x), \dots, f^{10}(x)\} \text{ où } x = -16.999991\dots$$

(5.4) La dérivée Schwartzienne de f n'est pas partout négative sur \mathbb{R}^- .

(5.5) Les intervalles $[-1, 0]$ et $[\nu_1, -1]$ sont invariants par f .

(5.6) Tout cycle d'entiers négatifs est répulsif.

(5.7) Il existe des orbites monotones non-bornées sur \mathbb{R}^- .

Démonstration. (indications)

Propriété (5.3) : Les vitesses d'attraction sont données dans le tableau 1.

Propriété (5.4) : La dérivée Schwartzienne est positive sur un intervalle contenant le point -0.2 . On a en effet $Sf(-0.2) = 39.961\dots$, où

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

Propriété (5.5) : La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[\nu_1, 0]$ contenant le point fixe répulsif -1 .

Propriété (5.6) : Voir les indications dans [3, p.16].

Propriété (5.7) : La démonstration est similaire à celle de (2.6).

□

Point ou cycle attractif	Période	Multiplicateur
0	1	0.5
ν_1	1	0.385708...
\mathcal{B}_1	3	0.036389...
\mathcal{B}_2	3	0.866135...
\mathcal{B}_3	11	0.003773...
\mathcal{B}_4	11	0.926287...

TABLE 1. Coefficients multiplicateurs des points et cycles attractifs sur les réels négatifs.

Remarque 5.1. Les cycles \mathcal{B}_2 et \mathcal{B}_4 sont très faiblement attractifs car leur multiplicateur est proche de 1 (cf. tableau 1). On vérifie également que les cycles contenant les points -5 et -17 sont très faiblement répulsifs, avec pour multiplicateurs respectifs les rationnels $9/8$ et $2187/2048$.

Comme précédemment, on note c_n les points critiques proches des entiers $n < 0$, et on peut montrer que les itérés successifs de c_n pour n impair négatif restent proches des itérés de n , par valeurs inférieures. Nous avons vérifié numériquement pour tout entier n , $-1000 < n < 0$, que

- si n est impair et $f^k(n) = -1$ (resp. -5, -17) pour un entier k , alors l’orbite de c_n converge vers ν_1 (resp. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3$);
- si n est pair et $f^k(n) = -1$ (resp. -5, -17) pour un entier k , alors l’orbite de c_n converge vers 0 (resp. $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_4$), sauf pour $n = -34, -66, -98, -130, -132, -162, -174, -194, -202, -226, \dots$ où l’orbite de c_n converge vers $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3, \nu_1, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1, \nu_1, \mathcal{B}_1, \nu_1, \nu_1, \dots$ respectivement. On note que les entiers $n \equiv -2 \pmod{32}$ semblent toujours faire partie des exceptions.

Le plus souvent, lorsque $n < 0$ est pair, l’orbite de c_n reste proche de l’orbite de n , par valeurs supérieures. Pour $n = -34, -98, -132, -162, -202, \dots$ les itérés de c_n finissent pas être inférieurs aux itérés de n , sans s’en éloigner pour autant. Pour $n = -66, -130, -174, -194, -258, \dots$ les orbites de n et de c_n sont décorréées après un nombre fini d’itérations. Dans ce dernier cas, on observe une répartition des orbites de c_n dans chacun des six bassins d’attraction de \mathbb{R}^- : 0, $\nu_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ et \mathcal{B}_4 .

Conjecture 5.2. *Points critiques d’ordre négatif impair*

Les points critiques c_n sont attirés soit par le point fixe ν_1 , soit par l’un des cycles \mathcal{B}_1 ou \mathcal{B}_3 , pour tout entier $n < 0$ impair.

6. DYNAMIQUE ASYMPTOTIQUE

Dans cette partie, nous étudions le comportement moyen de séquences finies d’itérations $S = \{f^i(x)\}_{i=0}^n$ telles que $\min\{|f^i(x)|\}_{i=0}^{n-1} \gg 1$, afin de déterminer la vitesse moyenne asymptotique (i.e. au voisinage de $\pm\infty$).

Nous dirons de manière informelle que S est uniformément distribuée modulo 2 (u. d. mod 2) si et seulement si la discrédance à l’origine

de $\{f^i(x) \bmod 2\}_{i=0}^{n-1}$ dans l'intervalle $[0, 2]$, notée $D_n^*(S \bmod 2)$, vérifie $D_n^*(S \bmod 2) \ll 1$.⁵

On rappelle que la notion de discrédance est une mesure de l'uniformité de la distribution d'une séquence de points $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\} \in [a, b]^n$ et est définie par

$$(6.1) \quad D_n^*(\mathcal{X}) := \sup_{a \leq c \leq b} \left| \frac{|\{x_1, \dots, x_n\} \cap [a, c]|}{n} - \frac{c - a}{b - a} \right|$$

Elle intervient notamment dans l'inégalité de Koksma [6] :

Théorème 6.1. (*Koksma*) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation (totale) $V(f)$ bornée. Alors pour toute séquence $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\} \in [a, b]^n$, on a

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| < V(f) D_n^*(\mathcal{X})$$

Nous considérons dorénavant que la fonction f définie par (2.1) s'applique sur \mathbb{R} tout entier. Comme f ne s'annule qu'en 0, il suit que $f^n(x)$ est de même signe que x pour tout réel $x \neq 0$ et tout entier n .

Notre approche consiste à approximer $f(x)/x$ par son asymptote sinusoidale

$$(6.2) \quad g(x) := 1 - \frac{\cos(\pi x)}{2}$$

dont on détermine la moyenne géométrique.

Lemme 6.2. La moyenne géométrique τ de la fonction réelle $g(x) = 1 - \cos(\pi x)/2$ sur $[0, 2]$ est égale à $\alpha/4$, où $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ est racine du polynôme $X^2 - 4X + 1$.

Démonstration. On cherche à calculer $\tau := \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^2 \ln(g(t)) dt\right)$ avec

$$g(t) = 1 - \cos(\pi t)/2 = (\alpha - e^{i\pi t})(\alpha - e^{-i\pi t})/(4\alpha) = |\alpha - e^{i\pi t}|^2/(4\alpha).$$

On obtient

$$\ln \tau = \int_0^2 \ln |\alpha - e^{i\pi t}| dt - \ln(4\alpha).$$

La formule de Jensen relative aux fonctions analytiques sur le disque de centre α et de rayon 1 donne le résultat attendu

$$\ln \tau = 2 \ln \alpha - \ln(4\alpha) = \ln\left(\frac{\alpha}{4}\right).$$

□

On montre à présent qu'au voisinage de $\pm\infty$ toute séquence d'itérations u. d. mod 2 de f décroît avec une vitesse moyenne proche de $\tau = (2 + \sqrt{3})/4 \simeq 0.933\dots$

5. On note $x \bmod 2$ la valeur modulo 2 de tout réel x , définie par $x \bmod 2 := x - 2\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$.

Théorème 6.3. *Soit une séquence finie d'itérations $S = \{f^i(x)\}_{i=0}^n$ telle que $\min\{|f^i(x)|\}_{i=0}^{n-1} \geq M$ pour un réel $M > \frac{1}{3}$. Alors on a*

$$\left| \frac{1}{n} \ln \left(\frac{f^n(x)}{x} \right) - \ln \tau \right| < 2(\ln 3) D_n^*(S \bmod 2) - \ln \left(1 - \frac{1}{3M} \right).$$

Démonstration. On considère la formulation $f(t) = g(t)(t + h(t))$ où h est la fonction périodique

$$h(t) := \frac{1 - \cos(\pi t)}{4g(t)} = \frac{1 - \cos(\pi t)}{4 - 2\cos(\pi t)}.$$

On a donc

$$\frac{f^n(x)}{x} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{f^{i+1}(x)}{f^i(x)} = \prod_{i=0}^{n-1} g(f^i(x)) \left(1 + \frac{h(f^i(x))}{f^i(x)} \right)$$

Il vient alors

$$\frac{1}{n} \ln \left(\frac{f^n(x)}{x} \right) - \ln \tau = A + B$$

avec

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(g(f^i(x))) - \ln \tau$$

et

$$B = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{h(f^i(x))}{f^i(x)} \right)$$

D'après le lemme 6.2,

$$\ln \tau = \frac{1}{2} \int_0^2 \ln(g(t)) dt$$

On applique l'inégalité de Koksma :

$$|A| \leq V(\phi) D_n^*(S \bmod 2)$$

où $V(\phi)$ est la variation totale de la fonction $\phi(t) := \ln(g(t))$ sur $[0, 2]$, soit $V(\phi) = 2\phi(1) - \phi(2) - \phi(0) = 2 \ln 3$.

Pour majorer $|B|$, on vérifie que la fonction $h(t)$ est à valeur dans $[0, 1/3]$ avec un maximum en $t = 1$. On en déduit que

$$|B| \leq \max \left(-\ln \left(1 - \frac{1}{3M} \right), \ln \left(1 + \frac{1}{3M} \right) \right) = -\ln \left(1 - \frac{1}{3M} \right).$$

□

Le théorème 6.3 est inopérant pour les séquences d'entiers, dont la vitesse moyenne attendue est $\sqrt{3}/2$, strictement inférieure à τ . Il permet toutefois d'établir un lien entre la vitesse moyenne et la distribution modulo 2 des itérations.

Théorème 6.4. *Soit x un réel d'orbite $\{f^i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ telle que*

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} |f^i(x)| > \frac{1}{3(1-\tau)} \simeq 4.97 \dots$$

Alors l'orbite de x n'est pas uniformément distribuée modulo 2.

Démonstration. Il existe un entier positif N et un réel $a > 1$ tels que

$$|f^i(x)| \geq \frac{a}{3(1-\tau)}$$

pour tout $i \geq N$.

On considère les séquences finies $S_n = \{f^i(x)\}_{i=N}^{n+N}$ pour tout n entier positif, et on pose $M_n := \min\{|f^i(x)|\}_{i=N}^{n+N}$.

D'après le théorème 6.3,

$$\frac{1}{n} \ln \left(\frac{f^{n+N}(x)}{f^N(x)} \right) - \ln \tau < 2(\ln 3)D_n^*(S_n \bmod 2) - \ln \left(1 - \frac{1}{3M_n} \right).$$

Il vient

$$2(\ln 3)D_n^*(S_n \bmod 2) > A_n + B_n$$

avec

$$A_n = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{f^{n+N}(x)}{f^N(x)} \right)$$

et

$$B_n = -\ln \tau + \ln \left(1 - \frac{1}{3M_n} \right).$$

D'une part, on vérifie aisément que $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \geq 0$. D'autre part, on a

$$B_n \geq -\ln \tau + \ln \left(1 - \frac{1-\tau}{a} \right) = \ln \left(1 + \frac{(a-1)(1-\tau)}{a\tau} \right) > 0.$$

On obtient donc le résultat souhaité :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} D_n^*(S_n \bmod 2) \geq \frac{\ln \left(1 + \frac{(a-1)(1-\tau)}{a\tau} \right)}{2 \ln 3} > 0$$

□

L'existence d'orbites tendant vers l'infini a été prouvée par Chamberland pour la fonction f et le corollaire 6.5 donne une condition nécessaire sur l'ensemble des valeurs modulo 2 d'une telle orbite.

Corollaire 6.5. *Soit x un réel d'orbite $\{f^i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ divergente telle que*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |f^i(x)| = +\infty.$$

Alors l'orbite de x n'est pas u. d. mod 2.

Remarque 6.1. Ce résultat renforce la conjecture 2.2. En effet, on peut s'attendre à ce que la condition de distribution uniforme modulo 2 des itérations de f soit le plus souvent valide au voisinage de $\pm\infty$, compte tenu des propriétés suivantes :

- le diamètre et la densité des zones contractantes tend vers 0,
- l'amplitude des oscillations devient infiniment grande.

RÉFÉRENCES

- [1] A. Aoufi, O. Rozier, Le problème de Syracuse dans \mathbb{C} , *Singularité N°5* (1990) 26.
- [2] E. Barone, Una argumentazione euristica probabilistica sulla successione di Collatz, *Ital. J. Pure Appl. Math.*, 4 (1998) 151–153.
- [3] M. Chamberland, A continuous extension of the $3x+1$ problem to the real line, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 2 (1996) 495–509.
- [4] R. E. Crandall, On the " $3x + 1$ " problem, *Math. Comp.*, 32 (1978) 1281–1292.
- [5] J. Dumont, C. Reiter, Real dynamics of a 3-power extension of the $3x + 1$ function, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 10 (2003) 875–893.
- [6] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, John Wiley & Sons, 1974.
- [7] J. Lagarias, *The Ultimate Challenge : The $3x+1$ Problem*, American Mathematical Monthly, 2010.
- [8] S. Letherman, D. Schleicher, R. Wood, The $3n+1$ problem and holomorphic dynamics, *Experiment. Math.*, 8, (1999) 241–251.
- [9] W. de Melo, S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, 1993.
- [10] E. Roosendaal, On the $3x + 1$ problem, <http://www.ericr.nl/wondrous>
- [11] G. J. Wirsching, *The Dynamical System Generated by the $3n + 1$ Function*, Springer-Verlag, 1998.

LGPC (UMR 5285), UNIVERSITÉ DE LYON, 69616, VILLEURBANNE, FRANCE
E-mail address: nlygeros@gmail.com

IPGP (UMR 7154), 75238, PARIS, FRANCE
E-mail address: olivier.rozier@gmail.com