Sur la concrétisation de l'abstrait en didactique des mathématiques

N. Lygeros

Dans le cadre de notre enseignement universitaire nous avons été amené à traiter en profondeur certains théorèmes sur les fonctions dérivables. Le point central de notre étude sur la démonstration de ce type de théorème a été le problème de la composition. Notre choix a été dicté par deux principes. Le premier c'est le caractère non abélien de la composition. Le second c'est la différence fondamentale entre la composition et les autres opérations classiques au niveau du domaine de définition.

Les règles de dérivation suivantes :

$$(f+g)' = f'+g', (\lambda f)' = \lambda f', (fg)' = f'g + g'f, \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

sont élémentaires.

Par contre pour la dérivée de la fonction réciproque nous avons besoin d'un théorème. Ce dernier utilise la bijectivité et la monotonie, en plus de la dérivabilité de la fonction initiale. Seulement un argument de type géométrique avec la notion de symétrie, permet de venir à bout de ce théorème, de manière élégante. Aussi le théorème sur la fonction composée nous semble naturellement plus fondamental.

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = g'(x) f'\left(g(x)\right)$$

Ce produit est complexe car il est implicite. Il cache en lui une simplification qui est le nœud du problème. Aussi pour le comprendre, il faut décomposer la simplification.

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \cdot \frac{f\left(g(x)\right) - f\left(g(x_0)\right)}{g(x)-g(x_0)}$$

Ici nous voyons que l'abstrait est simple, tandis que le concret est complexe. Nous retrouvons donc l'idée que la compréhension c'est la compression. Seulement cette fois lorsqu'il s'agit de didactique et donc d'enseigner la compréhension, nous devons décompresser le compact afin de mettre en évidence sa structure interne, son organisation.

A partir de là il est tout à fait possible d'avoir un véritable jeu de langage comme dirait Ludwig Wittgenstein. Car en exploitant la bijection nous pouvons imposer des données, comme nous l'avons signalé dans notre précédent article intitulé *Sur la contrainte formelle,* afin de mettre en évidence des relations, comme dans l'article intitulé *L'aspect expérimental des mathématiques.*

Pour avoir un exemple concret, il suffit de considérer les fonctions logarithme $\ln(x)$ et exponentielle $\exp(x)$, ainsi que la démonstration de l'équivalence :

$$\left[\left(e^{x}\right)'=e^{x}\right]\Leftrightarrow\left[\ln(x)'=\frac{1}{x}\right]$$

ou plutôt :

$$\left[\left(e^{x}\right)'.\frac{1}{e^{x}}=1\right]\Leftrightarrow\left[\ln(x)'.x=1\right]$$

qui cache en son sein la symétrie et le transport de structure.